Föreläsning 4

Avs. 6.6. forts. Vi har tidigare sett att;

$$D[x^a] = ax^{a-1}$$

$$D[e^x] = e^x$$

$$D[\ln x] = \frac{1}{x}$$

$$D[{}^a\log x] = \frac{1}{x \ln a}$$

$$D[\sin x] = \cos x$$

$$D[\cos x] = -\sin x$$

Av de två sista och kvotregeln får vi också att;

$$\boxed{D[\tan x]} = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} \boxed{\begin{aligned} &= 1 + \tan^2 x \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}}$$

Ex. $$D[\sin x \cdot \tan x] = \overbrace{\cos x \cdot \tan x}^{= \sin x} + \sin x \cdot (1 + \tan^2 x)$$

$$= \sin x (2 + \tan^2 x)$$

Ex. $$D\left[\frac{\cos x}{x + \tan x}\right] = \frac{(-\sin x)(x + \tan x) - \cos x\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)}{(x + \tan x)^2}$$

Avs. 6.7

Derivatan av en sammansatt funktion

Sats. Om g är deriverbar i x och f är deriverbar i $g(x)$ så är;

$$\boxed{D\left[f(g(x))\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Kedjeregeln — derivatan av den yttre funktionen — kallas för inre derivatan

Ex. $D\left[\underbrace{\sin(3x)}_{f(g(x))}\right] = \underbrace{\cos(3x)}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{3}_{g'(x)}$

där $f(x) = \sin x$ och $g(x) = 3x$

Ex $D\left[\underbrace{\ln(x^2+5)}_{f(g(x))}\right] = \underbrace{\frac{1}{x^2+5}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}$

där $f(x) = \ln x$ och $g(x) = x^2+1$

Anm. Mer allmänt får vi att; $\boxed{D\left[\ln f(x)\right] = \frac{f'(x)}{f(x)}}$

Kommer spec. till användning vid integralberäkningar i lp 4

Ex. $D\left[\underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{f(g(x))}\right] = \underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{g'(x)}$

där $f(x) = e^x$ och $g(x) = \sqrt{x}$

Ex $$D\big[\underbrace{\sqrt{e^x}}_{\substack{f(g(x))\\ f(x)=\sqrt{x}\\ g(x)=e^x}}\big] = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{e^x}}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$$

alt. $$D\left[\sqrt{e^x}\right] = D\left[e^{x/2}\right] = e^{x/2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$$

Anm. Kedjeregeln och produktregeln ger att;

$$D\left[\frac{T(x)}{N(x)}\right] = D\left[T(x)\cdot\frac{1}{N(x)}\right] = T'(x)\cdot\frac{1}{N(x)} + T(x)\cdot D\left[\frac{1}{N(x)}\right]$$

$$= \frac{T'(x)}{N(x)} + T(x)\underbrace{\frac{-1}{N(x)^2}\cdot N'(x)}_{D\Big[\underbrace{\frac{1}{N(x)}}_{f(g(x))}\Big]} = \frac{T'(x)N(x) - T(x)N'(x)}{N(x)^2}$$

, där $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = N(x)$

vilket visar kvotregeln.

Ex. $$D\Big[\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\substack{f(g(x))\\ f(x)=1/x\\ g(x)=\cos x}}\Big] = \underbrace{\frac{-1}{\cos^2 x}}_{f'(g(x))}\cdot\underbrace{(-\sin x)}_{g'(x)} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Anm. Även deriveringsregeln $D[x^a] = ax^{a-1}$ följer av kedjeregeln ty;

$$\underline{D[x^a]} = D[e^{\ln(x^a)}] = D[e^{a\ln x}] =$$
$$= e^{a\ln x} \cdot D[a\ln x] = x^a \cdot \frac{a}{x} = \underline{ax^{a-1}}$$

Ex. $D[x^x] = D[e^{\ln(x^x)}] = D[e^{x\ln x}] =$
$$= e^{x\ln x} \cdot D(x\ln x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod. regeln}}}{=} x^x \cdot (1 \cdot \ln x + x \cdot \tfrac{1}{x}) =$$
$$= x^x(\ln x + 1)$$

Bevisidé Kedjeregeln

$$D[f(g(x))] = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overbrace{g(x+h) - g(x)}^{k} + \overbrace{g(x)}^{y}) - f(\overbrace{g(x)}^{y})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(y+k) - f(y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(y+k) - f(y)}{k} \cdot \frac{\overbrace{g(x+h) - g(x)}^{k}}{h}$$

$$= f'(y) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

obs! I detta argument krävs att $k \neq 0$.
Detta kan dock lösas med lite mindre justeringar.

Tenta 26 april 2019

Uppg 1 Derivera följande funktionsuttryck m.a.p. x.

a) $e^{-x}(\cos x+\sin x)$ b) $\sqrt{\sin(2x)}$ c) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$

Lösn a) produktregeln & kedjeregeln

$$D\left[e^{-x}(\cos x+\sin x)\right] =$$

$$= -e^{-x}(\cos x+\sin x)+e^{-x}(-\sin x+\cos x) =$$

$$= \underline{-2e^{-x}\sin x}$$

b) kedjeregeln, kedjeregeln

$$D\left[\sqrt{\sin(2x)}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\sin(2x)}}\cdot D\left[\sin(2x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin(2x)}}\cdot 2\cos(2x) = \underline{\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}}$$

c) kvotregeln & kedjeregeln

$$D\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\right] =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\cdot(1+x^2)-\ln(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \underline{\frac{2x\left(1-\ln(1+x^2)\right)}{(1+x^2)^2}}$$

Uppg 2 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = \ln(e^x + e^{-x})$ i den punkt där $x = \ln 2$.

Lösn. Sätt $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

$$f(\ln 2) = \ln(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}) = \ln\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{5}{2}$$

$$f'(x) \overset{\text{kedjeregeln}}{=} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot D[e^x + e^{-x}] \overset{\text{kedjeregeln}}{=} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot (e^x - e^{-x})$$

$$f'(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}$$

Enpunktsformeln ger då tangentens ekv;

$$y - \ln\frac{5}{2} = \frac{3}{5}(x - \ln 2) \Leftrightarrow$$

$$y - \ln 5 + \ln 2 = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\underline{y = \frac{3}{5}x + \ln 5 - \frac{8}{5}\ln 2}$$