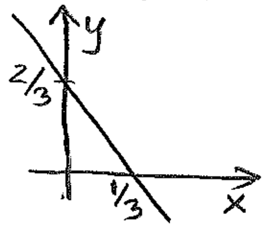
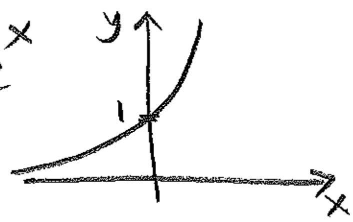
Föreläsning 5

Avs. 6.8 Lösningsmängden till en ekvation i två variabler, säg x och y, beskriver i allmänhet en kurva (eller flera) i xy-planet.

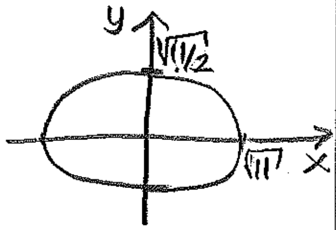
Ex 1 $3x+2y=1$ beskriver en linje



Ex. 2 $y=e^x$ beskriver grafen till e^x



Ex. 3 $x^2+2y^2=11$ beskriver en ellips



Anm. Eftersom vi alltid kan flytta över alla termer till ena sidan av likhetstecknet så kan alla sådana ekvationer skrivas på formen $F(x,y)=0$, där $F(x,y)$ är något uttryck i x och y.

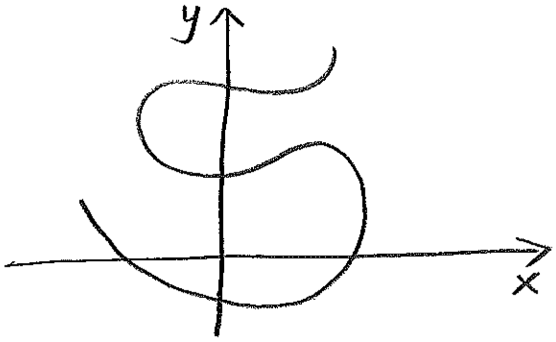
t.ex. $x^2+2y^2=11 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2y^2-11}_{F(x,y)}=0$

Speciellt kan också varje funktionskurva $y=y(x)$ skrivas på formen $F(x,y)=0$ ty;

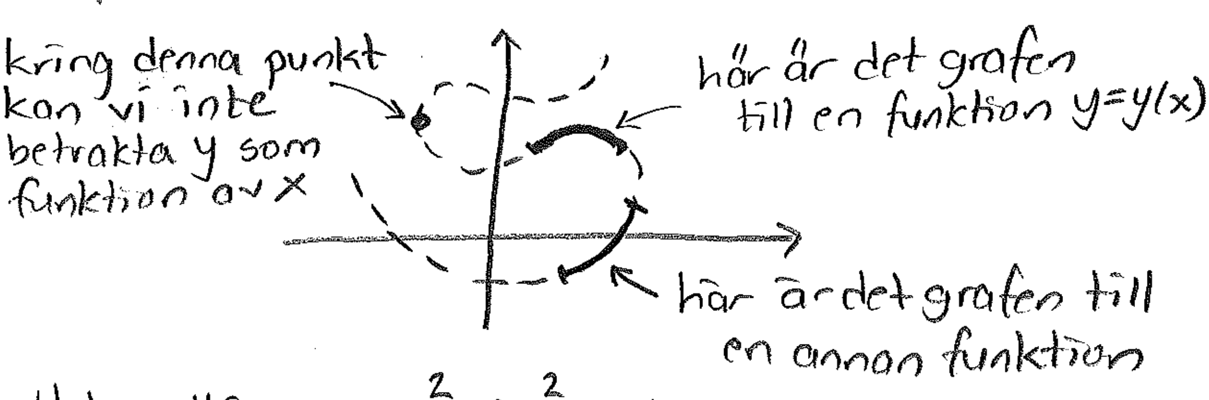
$$y=y(x) \iff \underbrace{y-y(x)}_{F(x,y)}=0$$

<u>Men</u> en kurva på formen $F(x,y)=0$ behöver inte vara en funktionskurva (se Ex.3 ovan)

En kurva på formen $F(x,y)=0$ skulle kunna se ut så här;

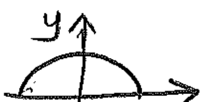


Dock kan man <u>lokalt</u> kring nästan alla punkter på kurvan betrakta det som en funktionskurva

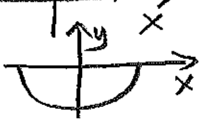


<u>Ex.</u> Hela ellipsen $x^2+2y^2=11$ kan inte betraktas som en funktionskurva men;

för $y>0$ kan ekv. skrivas $y=\sqrt{\frac{11-x^2}{2}}$



för $y<0$ kan ekv. skrivas $y=-\sqrt{\frac{11-x^2}{2}}$



En funktion som kan beskrivas genom lösningmängden till en ekvation av typen $F(x,y)=0$ sägs vara given på <u>implicit form</u>.

Om funktionen beskrivs genom en ekvation av typen $y=y(x)$ så sägs den vara given på <u>explicit form</u>.

Ibland kan man lösa ut ett explicit uttryck för en implicit definierad funktion;

<u>Ex.</u> För $x>0$ är;

$$x\ln(e^y+1)=1 \Leftrightarrow \ln(e^y+1)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

implicit form $\longrightarrow$

$$e^y+1=e^{1/x} \Leftrightarrow e^y=e^{1/x}-1 \Leftrightarrow$$

explicit form. $\longrightarrow$ $y=\ln(e^{1/x}-1)$

Oftast går det dock inte att lösa ut y ur en ekv. på formen $F(x,y)=0$

t.ex. om $y+e^y=x$

Trots det kan vi bestämma derivatan av en sådan implicit given funktion i varje given punkt (x_0,y_0) på kurvan.

Om $y=y(x)$ i ekv. $y+e^y=x$ så får vi;

$$y(x)+e^{y(x)}=x, \text{ för alla } x \text{ nära } x_0.$$

Deriverar vi båda led i denna ekv. m.a.p. x så får vi;

$$y'(x)+e^{y(x)}\cdot y'(x)=1 \iff$$

$$y'(x)(1+e^{y(x)})=1 \iff$$

$$y'(x)=\frac{1}{1+e^{y(x)}}$$

Spec. i punkten (x_0,y_0) får vi att;

$$y'(x_0)=\frac{1}{1+e^{y_0}}$$

Att på detta sätt derivera båda led i en ekvation m.a.p. en variabel kallas för <u>implicit derivering</u>.

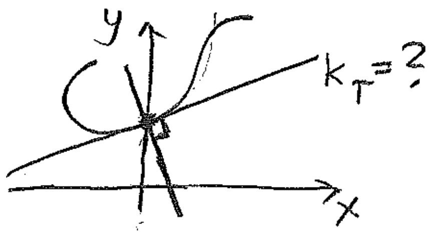
Oftast skriver man bara y' istället för $y'(x)$ och då kan ovanstående derivering skrivas lite kortare;

$$y+e^y=x \Rightarrow y'+e^y y'=1 \Rightarrow$$

$$y'(1+e^y)=1 \Rightarrow y'=\frac{1}{1+e^y}$$

Uppg: Bestäm tangent och normal till kurvan $y^3 = e^{xy}$ genom $(0,1)$

Lösn.



Notera först att kurvan $y^3 = e^{xy}$ verkligen går genom punkten $(0,1)$ ty

$$1^3 = e^{0 \cdot 1}$$

Om vi lokalt kring $(0,1)$ betraktar y som en funktion av x, dvs. $y = y(x)$ så ger implicit derivering av ekv.

$$y^3 = e^{xy}$$

att $\quad 3y^2 \cdot y' = e^{xy} \cdot (y + xy')$

Sätter vi $x = 0$ och $y = 1$ i denna ekv. så får vi; $\quad 3y' = 1$ dvs. $y'(0) = 1/3$

Spec. får vi då att;

tangentens ekv.: $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 0) \Leftrightarrow \underline{y = \frac{1}{3}x + 1}$

normalens ekv.: $y - 1 = -3(x - 0) \Leftrightarrow \underline{y = 1 - 3x}$

Med implicit derivering kan vi erhålla derivator för inverser till funktioner vi redan lärt oss derivera.

Ex. $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y \overset{(*)}{=} x, \; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Implicit derivering av (*) m.a.p. x ger;

$$(1+\tan^2 y)y' = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{1+\tan^2 y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enl.} \\ (*)}}{\Leftrightarrow}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$, vilket visar att;

$$\boxed{D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}}$$

På liknande vis kan man visa att;

$$\boxed{D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad \boxed{D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Anm. Vi har tidigare visat att $D[\ln x] = \frac{1}{x}$

Detta går också lätt att visa med implicit derivering givet att $D[e^x] = e^x$

ty; $\underline{y = \ln x} \Leftrightarrow e^y = x \xRightarrow{\text{implicit derivering}}$

$$e^y \cdot y' = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{e^y} \Leftrightarrow \underline{y' = \frac{1}{x}} \quad \underline{\text{VSB}}$$