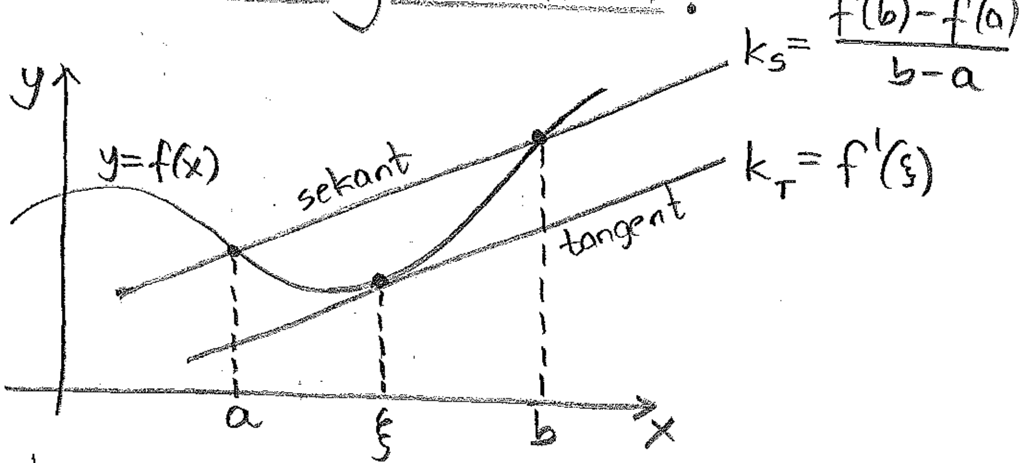
Föreläsning 7

Avs. 7.2 forts.

Sats (Lagrange medelvärdessats) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b) så finns det minst en punkt $\xi \in (a,b)$ sådan att;

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Geometrisk tolkning av satsen:



Satsen säger att det finns minst en punkt ξ mellan a och b där $k_S = k_T$ ty

$$k_S = k_T \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \Leftrightarrow f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Följdsats. Om $f(x)$ är deriverbar i ett intervall I så gäller;

1. $f'(x) < 0$, för alla $x \in I \Rightarrow f(x)$ är strängt avtagande i I
2. $f'(x) = 0$, för alla $x \in I \Rightarrow f(x)$ är konstant i I
3. $f'(x) > 0$, för alla $x \in I \Rightarrow f(x)$ är strängt växande i I

bevis Antag att $x_1, x_2 \in I$ och att $\underline{x_1 < x_2}$.
Eftersom $[x_1, x_2]$ är ett delintervall av I så är f deriverbar på $[x_1, x_2]$ och därmed även kontinuerlig där. Av medelvärdessatsen följer därför att det finns minst ett $\xi \in (x_1, x_2)$ sådant att;

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Av detta följer att;

① $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{<0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0 \Rightarrow \underline{f(x_2) < f(x_1)}$
$\because$ str. avtagande

② $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0}(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow \underline{f(x_2) = f(x_1)}$
$\because$ konstant

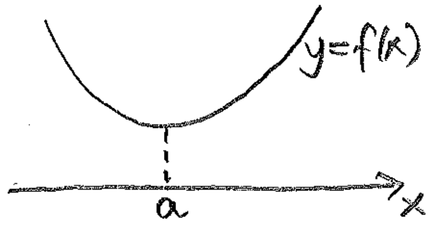
③ $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0 \Rightarrow \underline{f(x_2) > f(x_1)}$
$\because$ str. växande

VSB.

För att avgöra om en funktion har lokalt max eller min i en kritisk punkt $x = a$ så kan vi undersöka derivatans tecken på båda sidor om den kritiska punkten

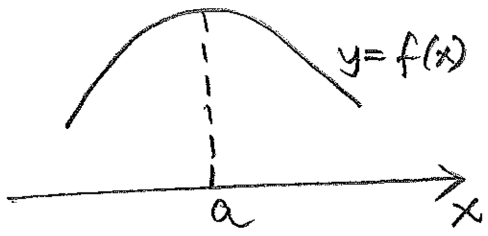
Vi kan särskilja fyra fall;

x	$<$	a	$<$
$f'(x)$	$-$	0	$+$



lokalt minimum

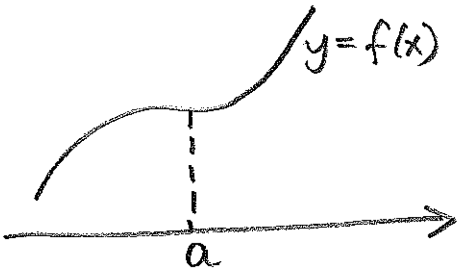
x	$<$	a	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$



lokalt maximum

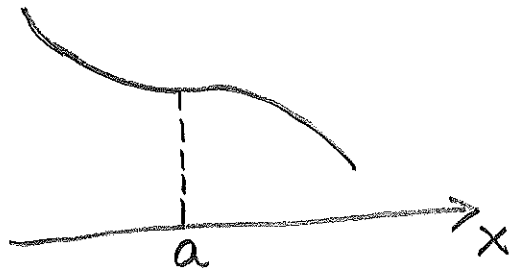
---

x	$<$	a	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$+$



terasspunkt

x	$<$	a	$<$
$f'(x)$	$-$	0	$-$



terasspunkt

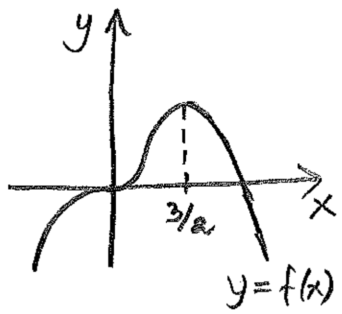
<u>Uppg</u>. Bestäm alla lokala extrempunkter till följande funktioner;

a) $f(x) = 2x^3 - x^4$

b) $f(x) = 2\arctan x - x$

c) $f(x) = x|x-1|$

<u>lösn.</u> a) $f'(x) = 6x^2 - 4x^3 = 4x^2\left(\frac{3}{2} - x\right) = 0 \Leftrightarrow$ $x = 0$ eller $x = \frac{3}{2}$



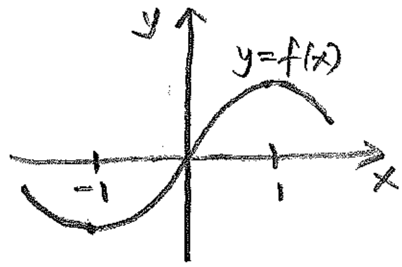
x	<	0	<	$3/2$	<
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	↗	0	↗	$27/16$	↘

f har terasspunkt i $(0,0)$ och lokalt maximum i $\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{16}\right)$

---

b) $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} - 1 = \dfrac{2-(1+x^2)}{1+x^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	<	-1	<	1	<
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$1-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}-1$	↘



f har lokalt minimum i $\left(-1, 1-\frac{\pi}{2}\right)$ och lokalt maximum i $\left(1, \frac{\pi}{2}-1\right)$

---

c) $f(x) = \begin{cases} -x(x-1), & \text{då } x \leq 1 \\ x(x-1), & \text{då } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x - x^2, & \text{då } x \leq 1 \\ x^2 - x, & \text{då } x > 1 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{då } x < 1 \\ 2x-1, & \text{då } x > 1 \end{cases}$

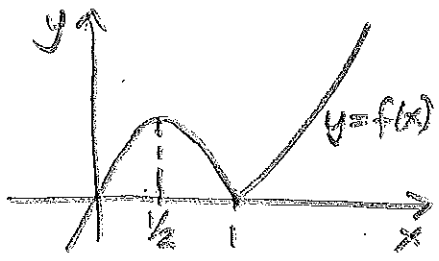
f är ej deriverbar i $x=1$ ty $\overbrace{f'_-(1)}^{-1} \neq \overbrace{f'_+(1)}^{1}$

(I) <u>$x<1$</u> : $f'(x) = 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ← $\boxed{\text{obs! uppfyller } x<1}$

(II) <u>$x>1$</u> : $f'(x) = 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ← $\boxed{\text{falsk rot, ty uppfyller inte } x>1}$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}$ är den enda kritiska punkten

x		$1/2$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0	$\nearrow$



f har lokalt maximum i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ och lokalt minimum i $(1, 0)$

__Uppg.__ Man önskar tillverka en cylindrisk konservburk (med lock) av plåt med en bestämd volym V. Dessutom vill man ge den en sådan form att plåtåtgången blir minimal. Vilka mått bör burken ha?

__Lösn.__

$$\underset{\text{volymen}}{V} = \pi r^2 \cdot h$$

Plåtåtgången är;

$$\underbrace{2\pi r^2}_{\substack{\text{arean}\\ \text{av botten}\\ \text{och lock}}} + \underbrace{2\pi r\cdot h}_{\substack{\text{arean av}\\ \text{mantelytan}}} = 2\pi r^2 + 2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2} = \underbrace{2\pi r^2 + \frac{2V}{r}}_{\substack{f(r)\\ r\geq 0}}$$

$$f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 2\,\frac{2\pi r^3 - V}{r^2} = 0 \iff$$

$$2\pi r^3 - V = 0 \iff r^3 = \frac{V}{2\pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

r	0	$<$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$<$
$f'(r)$		$-$	0	$+$
$f(r)$			$f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$	

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \underset{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}{=} \frac{V}{\pi}\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{-2/3} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

__Svar__ Burken skall ha radien $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ och höjden $2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

$$\left(f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 2\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3} + 2\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}\cdot 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3} = \underset{\text{minimala plåtåtgången}}{6\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}}\right)$$