

Uppg. Bestäm inflexionspunkterna till funktionen $f(x) = e^{-x^2}$ och ange i vilka intervall den är konvex resp. konkav.

lös. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$
 $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

$f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

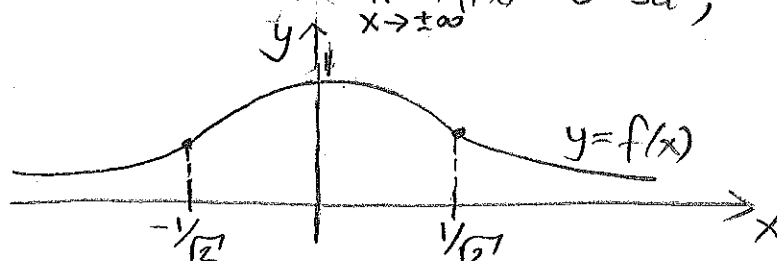
$f(x)$ har inflexionspunkterna $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ och $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$.

$\therefore f(x)$ är konvex på $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ och konkav på $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

Anm. Notera att $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ så vi kan också ställa upp följande utökade tecken tabell;

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$

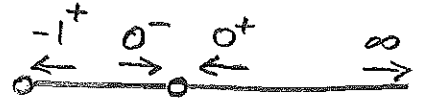
Notera också att $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ så;



Uppg. (Uppg. 4 på tentan 12/4-17)

Bestäm definitionsmängd och värdemängden för funktionen $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1)$

lös. ① $D_f: x > -1, x \neq 0$



② $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1) \rightarrow -\infty$, då $x \rightarrow -1^+$

$f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1) \rightarrow -\infty$, då $x \rightarrow 0^-$

$f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1) \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow 0^+$

$f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1) \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow \infty$

(obs! Sned asymptot behöver inte undersökas om bara värdemängd efterfrågas)

③ $\text{singulära punkter saknas}$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2(x+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-1}{2} \text{ eller } x = 1$$

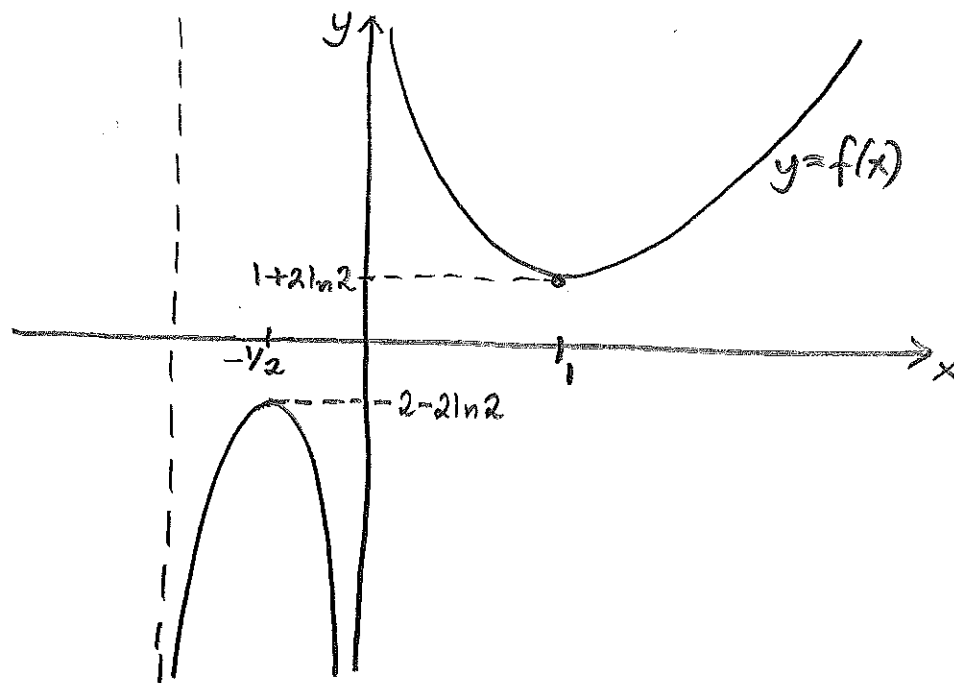
$\therefore x = \frac{-1}{2}$ och $x = 1$ är kritiska punkter

obs! $f'(x) = \frac{2(x + \frac{1}{2})(x - 1)}{x^2(x+1)}$

④

x	-1	$<$	$-\frac{1}{2}$	$<$	0	$<$	1	$<$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2-2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	$1+2\ln 2$	$\nearrow$	∞

⑤



Svar: $D_f = (-1, 0) \cup (0, \infty)$

$V_f = (-\infty, -2-2\ln 2] \cup [1+2\ln 2, \infty)$

Uppg. Skissa grafen till $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

lös. ① $D_f: x > 0$



② $f(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow \infty} \underbrace{\ln x}_{\rightarrow \infty} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$

$x \rightarrow \infty$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x} \ln x}{x} = \frac{\ln x}{x^{1/2}} \rightarrow 0''^k, \text{ då } x \rightarrow \infty \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \text{sgv.} \end{array} \right.$

$f(x) - kx = f(x) \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow \infty$

spec. finns ingen asymptot då $x \rightarrow \infty$

$x \rightarrow 0^+$ $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\ln x}_{\rightarrow -\infty} \text{ då } x \rightarrow 0^+ \\ \quad \quad \quad \downarrow \text{ } x=1/t \\ \quad \quad \quad = \sqrt{\frac{1}{t}} \ln \frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{t^{1/2}} \rightarrow 0 \text{ då } t \rightarrow \infty \\ \quad \quad \quad \text{dvs. } x \rightarrow 0^+ \end{array} \right.$

spec. finns ingen asymptot då $x \rightarrow 0^+$

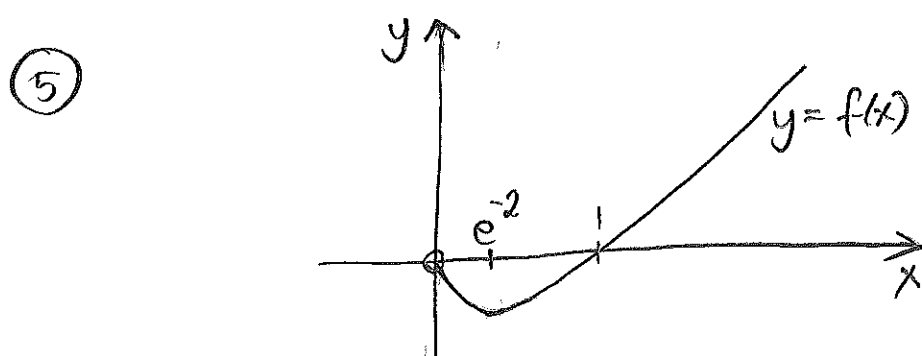
③ Singulära punkter saknas

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

$\therefore x = e^{-2}$ är en kritisk punkt

④

x			e^{-2}		∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2/e$	$\nearrow$	∞



Uppg. Bestäm ekvationen för normalen till kurvan $xy^3 + x^3y = 10$ i punkten $(1, 2)$

lös Implicit derivering och produktregeln ger;

$$y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y' + 3x^2y + x^3y' = 0$$

Spec. i punkten $(1, 2)$ får vi att;

$$8 + 12y' + 6 + y' = 0 \Leftrightarrow 13y' = -14 \Leftrightarrow y' = -\frac{14}{13}$$

Normalens riktn. koeff. är därför $k_n = \frac{13}{14}$

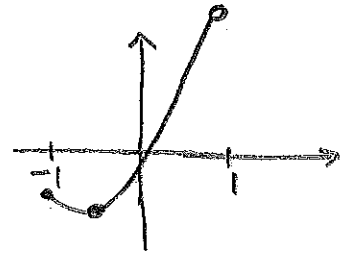
och normalen beskrivs av ekvationen;

$$y - 2 = \frac{13}{14}(x - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \frac{13}{14}x + \frac{15}{14}}}$$

uppg. Avgör om funktionen $f(x) = xe^{2x}$ har ett största resp. minsta värde på $D_f = [-1, 1)$, och bestäm i så fall dessa.

lös. $f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	e^2



Funktionen antar inget största värde på D_f men det minsta värdet som funktionen antar är $-\frac{1}{2e}$.
