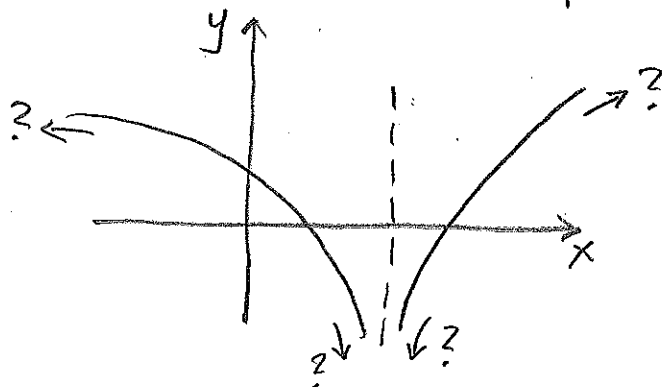


Föreläsning 8

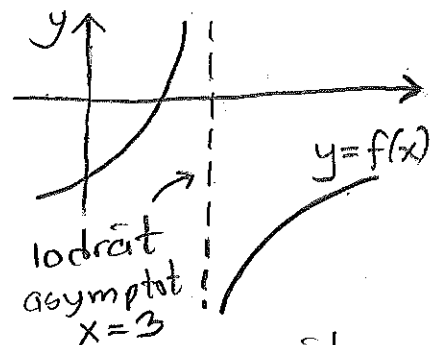
Avs. 7.3 & 7.4 (Asymptoter)

Vi skall nu undersöka vad som händer
nära "ändpunkter" till D_f t.ex.

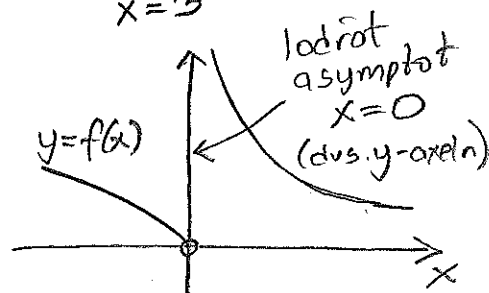


Def. En linje av typen $x=a$ sägs vara en
lodrät asymptot till kurvan $y=f(x)$ om
 $f(x) \rightarrow \infty$ eller $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow a^+$ och/eller $x \rightarrow a^-$.

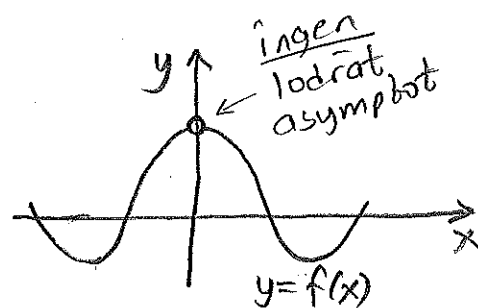
Ex. $f(x) = \frac{3x}{2-x} \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow 2^-$
 $\rightarrow -\infty$, då $x \rightarrow 2^+$



Ex. $f(x) = e^{1/x} \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow 0^+$
 $\rightarrow 0$, då $x \rightarrow 0^-$



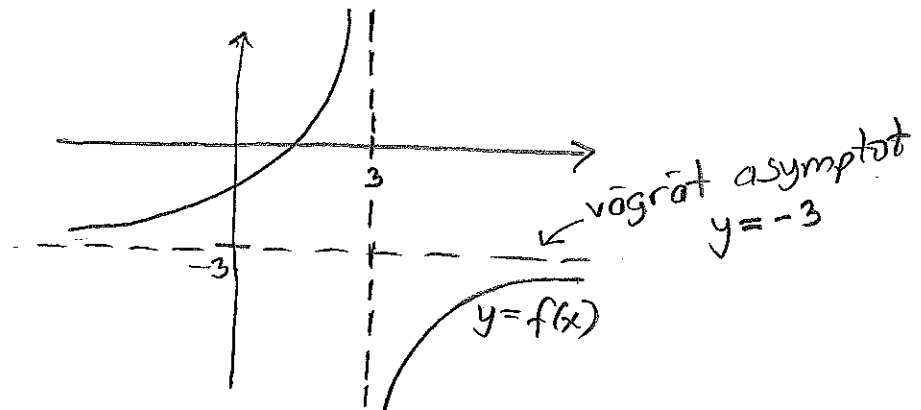
Ex. $f(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0^\pm$



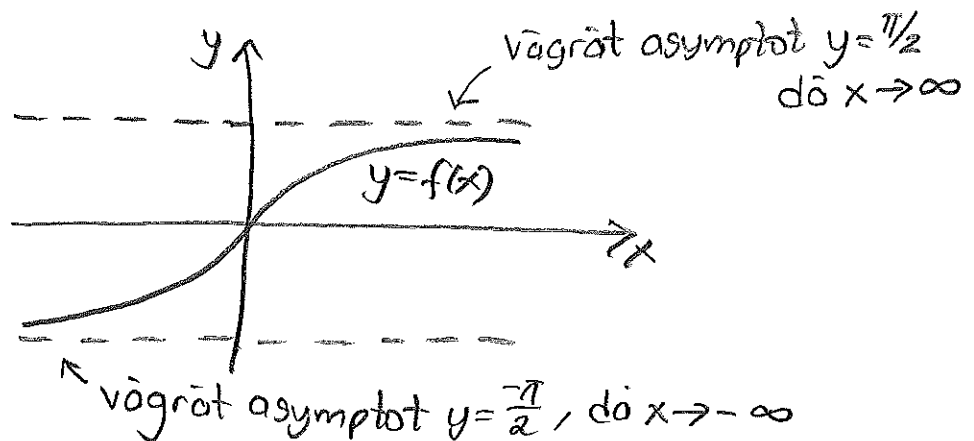
Def. En linje $y=m$ sägs vara en vågrät asymptot till $y=f(x)$ om

$$f(x) \rightarrow m \text{ då } x \rightarrow \infty \text{ och/eller } x \rightarrow -\infty$$

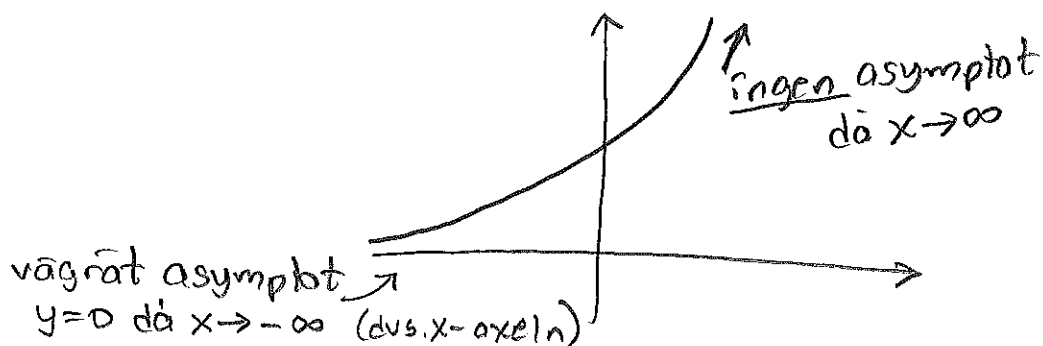
Ex. $f(x) = \frac{3x}{2-x} = \frac{3}{\frac{2}{x}-1} \rightarrow -3 \text{ då } x \rightarrow \pm \infty$



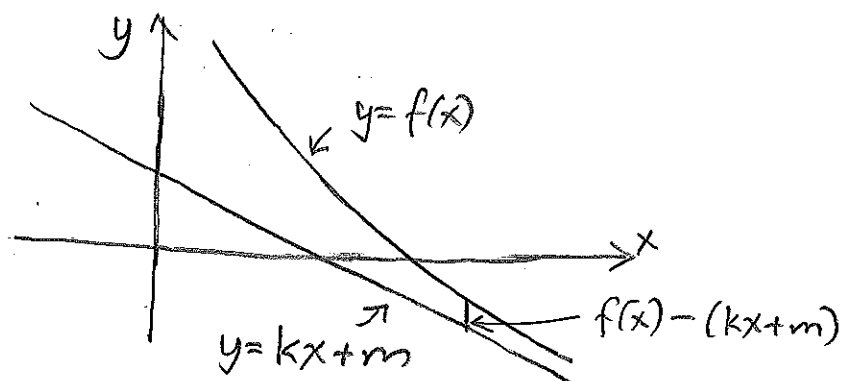
Ex. $f(x) = \arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ då } x \rightarrow \infty$
 $\rightarrow -\frac{\pi}{2}, \text{ då } x \rightarrow -\infty$



Ex. $f(x) = e^x \rightarrow \infty, \text{ då } x \rightarrow \infty$
 $\rightarrow 0, \text{ då } x \rightarrow -\infty$



Om vågrät asymptot saknas så kan man istället undersöka om kurvan möjligen kan närma sig en sned linje t.ex.

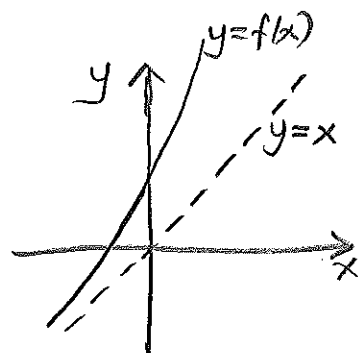


Def. En linje $y=kx+m$ sägs vara en sned asymptot till kurvan $y=f(x)$ om;
 $\underbrace{f(x)-(kx+m)} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ och/eller $x \rightarrow -\infty$

Anm. Specialfallet $k=0$ ger en vågrät asymptot.

Ex. $f(x) = x + e^x$

$$f(x) - x = e^x \begin{matrix} \rightarrow \infty, & \text{då } x \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0, & \text{da } x \rightarrow -\infty \end{matrix}$$



sa $y=x$ ar en sned asymptot da $x \rightarrow -\infty$
 (obs! asymptot da $x \rightarrow \infty$ saknas)

Ex. $f(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{x+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polynom-} \\ \text{division}}}{=} 2x - 1 + \frac{3}{x+1} \Rightarrow$

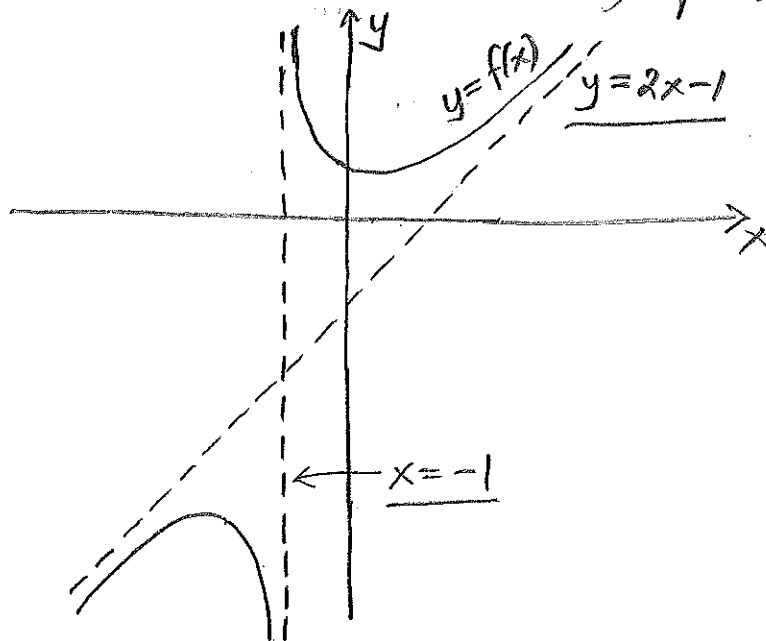
$$f(x) - (2x - 1) = \frac{3}{x+1} \rightarrow 0, \text{ d\AA } x \rightarrow \pm \infty$$

$\therefore y = 2x - 1$ \AA r en sned asymptot d\AA $x \rightarrow \pm \infty$

Vi avl\AA ser ocks\AA att;

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x+1} \begin{matrix} \rightarrow \infty, \text{ d\AA } x \rightarrow -1^+ \\ \rightarrow -\infty, \text{ d\AA } x \rightarrow -1^- \end{matrix}$$

$\therefore x = -1$ \AA r en lodr\AA t asymptot till $y = f(x)$



Anm. $y = kx + m$ \AA r en sned asymptot till $y = f(x)$ d\AA $x \rightarrow \infty$ om och endast om

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ och } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = m$$

Samma villkor g\AA ller f\AA r sned asymptot d\AA $x \rightarrow -\infty$

Ex. $f(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{x+1}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2 + x + 2}{x(x+1)} = \frac{2x^2 + x + 2}{x^2 + x} = \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{2 = k}{\text{då } x \rightarrow \pm\infty}$$

$$\begin{aligned} f(x) - kx &= \frac{2x^2 + x + 2}{x+1} - 2x = \frac{2x^2 + x + 2}{x+1} - \frac{2x(x+1)}{x+1} = \\ &= \frac{-x + 2}{x+1} = \frac{-1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow \underline{-1 = m}, \text{ då } x \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

$\therefore y = 2x - 1$ är en sned asymptot då $x \rightarrow \pm\infty$
(samma som vi fick i tidigare ex.)

Nu några "standardgränsvärden" som kan vara användbara vid bestämning av asymptoter.

Sats För alla värden på p och för $q > 0$ gäller att;

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^{qx}} = 0 \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0$$

Ex. $f(x) = (x+1)e^{2x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+1}{x} e^{2x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{2x} \rightarrow \infty, \text{ då } x \rightarrow \infty$$

$$\rightarrow \underline{0 = k} \text{ då } x \rightarrow -\infty$$

$$f(x) - kx = (x+1)e^{2x} \xrightarrow{x=-t} (1-t)e^{-2t} = \frac{1}{e^{2t}} - \frac{t}{e^{2t}} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow -\infty$$

$\therefore y = 0$ är en vågrät asymptot
då $x \rightarrow -\infty$ $\rightarrow 0 \rightarrow 0$ enl. sats ovan