Avs. 7.4. forts (Asymptoter) Kom ihåg från förra föreläsningen att;

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^{qx}} = 0$, $q>0$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0$, $q>0$

Ex $f(x) = e^{-x}\ln(x^2)$, $D_f: x \neq 0$

$x \to 0^{\pm}$: $f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\to 1}\underbrace{\ln(x^2)}_{\to -\infty} \to -\infty$, då $x \to 0^{\pm}$

$\therefore$ $x=0$ är en lodrät asymptot

$x \to -\infty$: $f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\to \infty}\underbrace{\ln(x^2)}_{\to \infty} \to \infty$, då $x \to -\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}\underbrace{\ln(x^2)}_{\to\infty} \to -\infty, \text{ då } x \to -\infty$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x=-t}}{=} \frac{-1}{\underbrace{t/e^t}_{\to 0^+}} \to -\infty, \text{ då } t\to\infty \text{ dvs. } x \to -\infty$$

så kurvan har ingen asymptot då $x \to -\infty$.

$x \to \infty$: $f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\underbrace{\ln(x^2)}_{\to \infty} = \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\substack{\to 0 \\ \text{enl. (1) ovan.}}} \cdot 2 \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\substack{\to 0 \\ \text{enl (2) ovan}}} \to 0$ då $x \to \infty$

$\therefore$ $y=0$ är en vågrät asymptot då $x \to \infty$

Avs. 7.5 Arbetsschema vid kurvkonstruktion:

1. Bestäm definitionsmängd.
2. Bestäm eventuella asymptoter
3. Bestäm eventuella singulära punkter och kritiska punkter
4. Gör teckenschema för derivatan
5. Rita kurvan utifrån ovanstående info.

Uppg. (uppg 4 på tentan 17/3-18) Bestäm lokala extrempunkter och asymptoter till kurvan

$$y = \frac{x^2+x-1}{x-1}$$

och skissera kurvan.

Lösn. $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

① $\boxed{D_f : x \neq 1}$

② $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1} = \frac{x+1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \begin{cases} \nearrow \infty, \text{ då } x \to \infty \\ \searrow -\infty, \text{ då } x \to -\infty \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+x-1}{x(x-1)} = \frac{x^2+x-1}{x^2-x} = \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \to \underset{k}{1}, \text{ då } x \to \pm\infty$$

$$f(x) - \overset{1}{k}x = \frac{x^2+x-1}{x-1} - x = \frac{x^2+x-1-x(x-1)}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

$$= \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \to \underset{m}{2}, \text{ då } x \to \pm\infty$$

$\therefore$ $\boxed{y = x+2 \text{ är sned asymptot då } x \to \pm\infty}$

>0 nära $x=1$

$$f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1} \begin{array}{l}\to \infty, \text{ då } x\to 1^+ \\ \to -\infty, \text{ då } x\to 1^-\end{array}$$

Spec. är $\boxed{x=1 \text{ en lodrät asymptot då } x\to 1^{\pm}}$

③ $\boxed{\text{Singulära punkter saknas.}}$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0$$

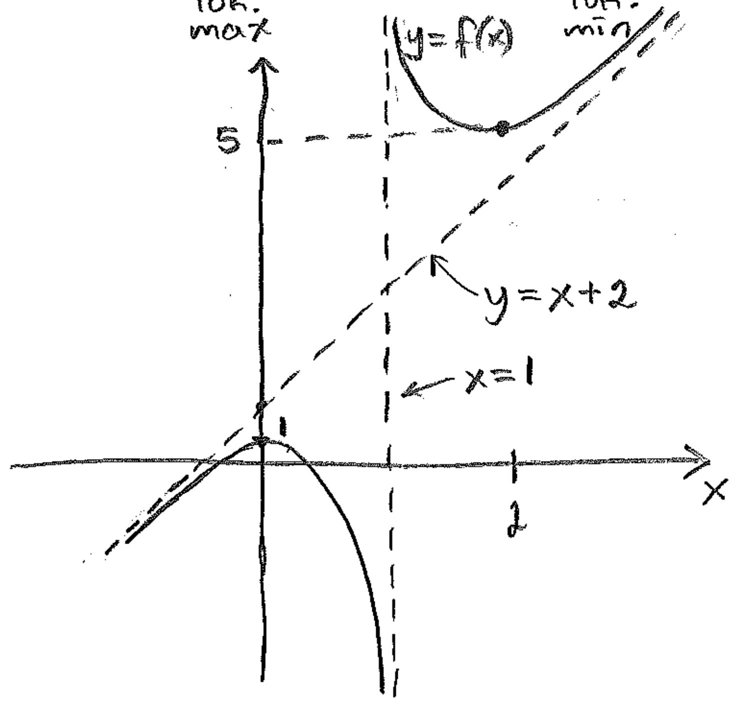
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x=2$$

$\therefore$ $\boxed{x=0 \text{ och } x=2 \text{ är kritiska punkter}}$

④

x	$-\infty$	<	0	<	1	<	2	<	∞
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ \ ∞	↘	5	↗	∞
			lok. max				lok. min		

⑤



Uppg. (uppg. 3 på tentan 12/4-17)

Rita grafen till funktionen $f(x)=\frac{1}{2x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$

Lösn. (1) $\boxed{D_f : x>0}$

(2) $f(x)=\underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{2}{\sqrt{x}}}_{\to 0}\to 0$ då $x\to\infty$

$\therefore$ $\boxed{y=0 \text{ är vågrät asymptot då } x\to\infty}$

$f(x)=\frac{1}{2x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{\overbrace{1-4\sqrt{x}}^{>0 \text{ nära } x=0}}{2x}\to\infty$ då $x\to 0^+$

$\therefore$ $\boxed{x=0 \text{ är lodrät asymptot då } x\to 0^+}$

(3) $\boxed{\text{singulära punkter saknas}}$

$f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+\frac{2}{2x^{3/2}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2x^2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

$\therefore$ $\boxed{x=\frac{1}{4} \text{ är en kritisk punkt}}$

(4)

x	0		1/4		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘	-2	↗	0

(5)