

Foreläsning 12

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D[\ln|x|]}} &= D\left[\begin{cases} \ln x, & \text{dà } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{dà } x < 0 \end{cases}\right] = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dà } x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1), & \text{dà } x < 0 \end{cases} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}} \end{aligned}$$

Uppg. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = \ln|2x-3|$ i den punkt där $x=1$.

105n. $f(x) = \ln|2x-3|$, $f(1) = \ln|-1| = \ln 1 = 0$
 $f'(x) = \frac{1}{2x-3} \cdot 2$, $f'(1) = -2$

tangentens ekv.: $y - 0 = -2(x - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2 - 2x}}$

uppg 6 på tentan 17/3-18 Bestäm antalet rötter till ekvationen $e^x - C(x-1) = 0$ för olika värden på C .

lös n. Notera först att $x=1$ inte är en rot till ekv. oavsett värde på C . För $x \neq 1$ får vi;

$$e^x - C(x-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x-1} = C$$

Lös $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$, $D_f: x \neq 1$

$\xleftarrow{-\infty} \quad \xrightarrow{1^-} \quad \xleftarrow{1^+} \quad \xrightarrow{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1} \rightarrow 0, \text{ da } x \rightarrow -\infty$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1} = \frac{1}{\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{SGV}}} - \underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\rightarrow 0}} \rightarrow \infty, \text{ d\u00e5 } x \rightarrow \infty$$

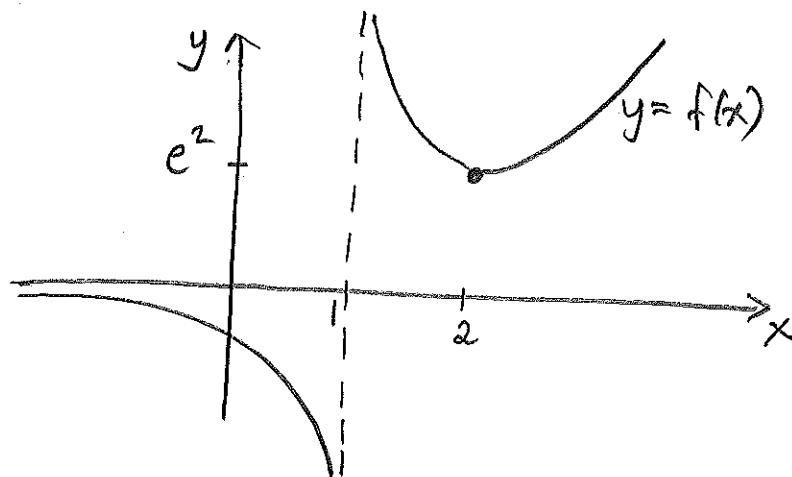
$$f(x) = \frac{e^x}{x-1} \rightarrow -\infty, \text{ d\u00e5 } x \rightarrow 1^-$$

$$\searrow \infty, \text{ d\u00e5 } x \rightarrow 1^+$$

Singul\u00e4ra punkter saknas

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x=2$$

x	$-\infty$		1		2		∞
$f'(x)$		-		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	∞



Vi avl\u00e4ser av grafen att ekv. $f(x) = C$ har

$$\begin{cases} 2 \text{ r\u00f6tter om } C > e^2 \\ 1 \text{ rot om } C = e^2 \text{ eller } C < 0 \\ \text{inga r\u00f6tter om } 0 \leq C < e^2 \end{cases}$$

Uppg 6 på tentan 19/3-16 Låt $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans def.

lös.

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{(x+h)^2+1} - \frac{1}{x^2+1}}{h} = \\ &= \frac{\frac{x^2+1 - ((x+h)^2+1)}{h(x^2+1)((x+h)^2+1)}}{h} = \frac{-2xh - h^2}{h(x^2+1)((x+h)^2+1)} = \\ &= \frac{-2x - h}{(x^2+1)((x+h)^2+1)} \rightarrow \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = f'(x) \end{aligned}$$

Uppg 6 på tentan 20/8-15 Bestäm största och minsta värde samt eventuella inflexionspunkter för $f(x) = e^{-x} \sin x$, för $x \in D_f = [0, 2\pi]$

lös. $f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x} (\cos x - \sin x) = 0$

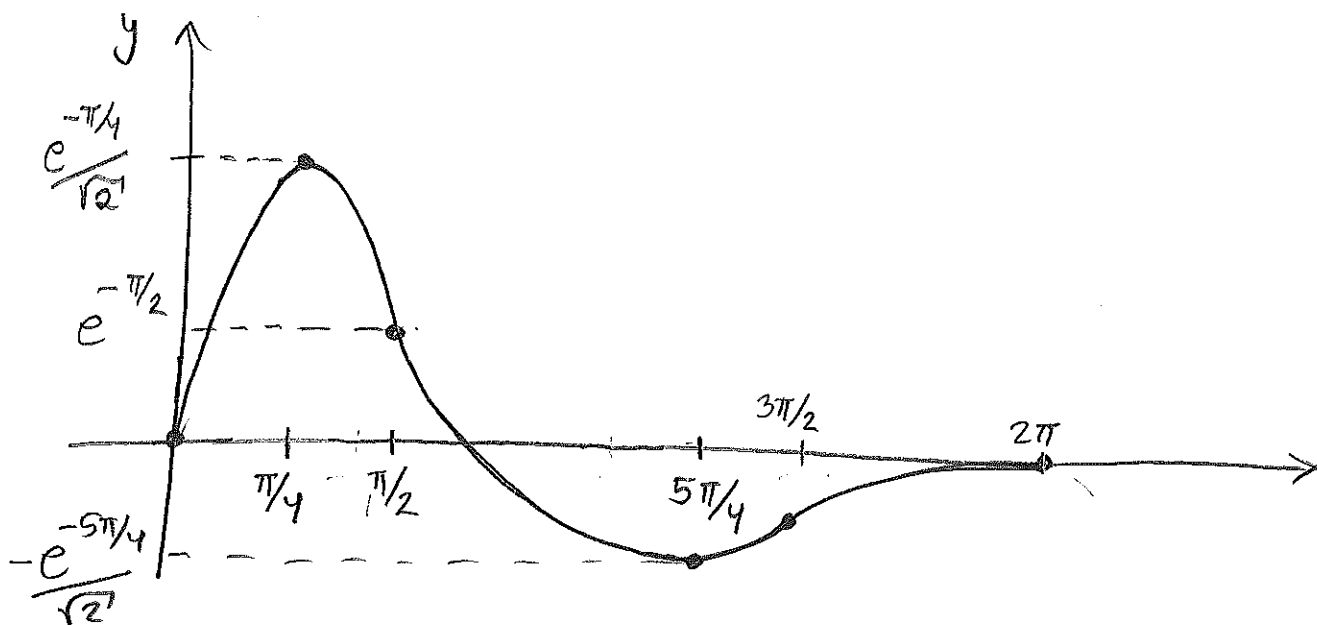
$$\Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ och $x = \frac{5\pi}{4}$ är kritiska punkter i D_f .

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x} (\cos x - \sin x) + e^{-x} (-\sin x - \cos x) = \\ &= -2e^{-x} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{aligned}$$

$\therefore f''(x) = 0$ har bara lös. $x = \frac{\pi}{2}$ och $x = \frac{3\pi}{2}$ i D_f

x	0	<	$\pi/4$	<	$\pi/2$	<	$5\pi/4$	<	$3\pi/2$	<	2π
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$e^{-\pi/2}$	$\searrow$	$-\frac{e^{-5\pi/4}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$-e^{-3\pi/2}$	$\nearrow$	0

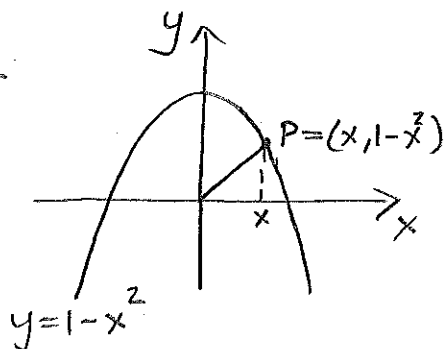


kurvan har inflexionspunkter i $(\frac{\pi}{2}, e^{-\pi/2})$ och $(\frac{3\pi}{2}, -e^{-3\pi/2})$.

Funktionens största värde är $e^{-\pi/4}$ och dess minsta värde är $-e^{-5\pi/4}$.

Uppg. Bestäm avståndet från origo till kurvan $y = 1 - x^2$.

lös.



Av symmetri skäl räcker det att studera punkter på kurvan där $x \geq 0$.

Avståndet från origo till P är

$$d = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2}$$

Sätt $f(x) = x^2 + (1 - x^2)^2$.

$$f'(x) = 2x - 4x(1 - x^2) = 4x(x^2 - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ \text{eller} \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}$$

x	0	<	$1/\sqrt{2}$	<	∞
$f'(x)$		-	0		
$f(x)$	1	>	3/4	>	∞

Svar: Kortaste avståndet är $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

alt. lös. I den punkt P på kurvan som ligger närmast origo måste normalen gå genom origo. Normalen i en punkt $P = (a, 1-a^2)$ har ekv.

$$y - (1-a^2) = \frac{1}{2a}(x-a)$$

$x=0$ och $y=0$ i denna ekv. ger;

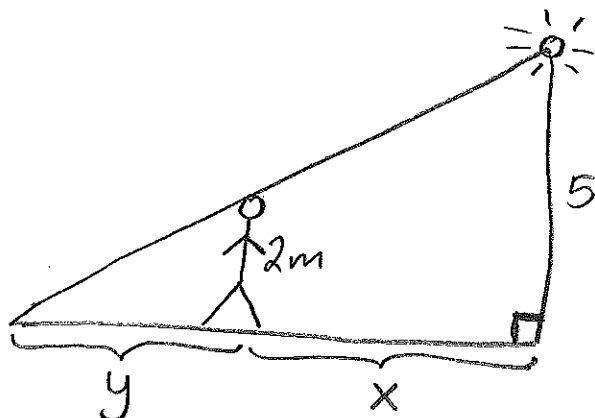
$$a^2 - 1 = \frac{-1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = (\pm) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

så $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ ligger närmast origo och avståndet från P till origo är;

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

Uppg. En 2 meter lång man går rakt mot en 5 meter hög gatulampa med hastigheten 0.5 m/s . Hur snabbt minskar längden på mannens skugga?

Lös.



Vi söker $y'(t)$
Vi vet att $x'(t) = -0.5 \text{ m/s}$
Vilket samband finns mellan x och y ?

Likformighet ger att $\frac{y}{2} = \frac{x+y}{5} \Rightarrow$

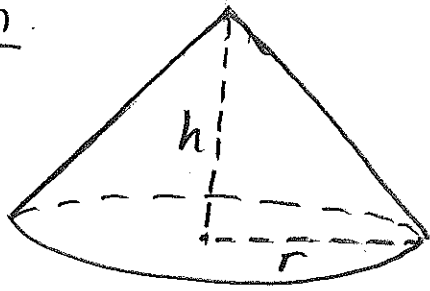
$$5y = 2(x+y) \Rightarrow 3y = 2x \Rightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow$$

$$y'(t) = \frac{2}{3}x'(t) = \frac{2}{3}(-0.5) = -\frac{1}{3}$$

Svar: Skuggans längd minskar med $\frac{1}{3} \text{ m/s}$.

Uppg. Sägspån faller i en hög med en hastighet av $\frac{1}{2} \text{ m}^3/\text{min}$. Antag att sägspånshögen hela tiden har formen av en cirkulär kon vars höjd är samma som radien för dess bas. Hur snabbt ökar högens höjd i det ögonblick då högen är 3 m hög?

lösning



Vi söker $h'(t)$.

Vi vet att $V'(t) = \frac{1}{2} \text{ (m}^3/\text{min)}$

där V är konens volym.

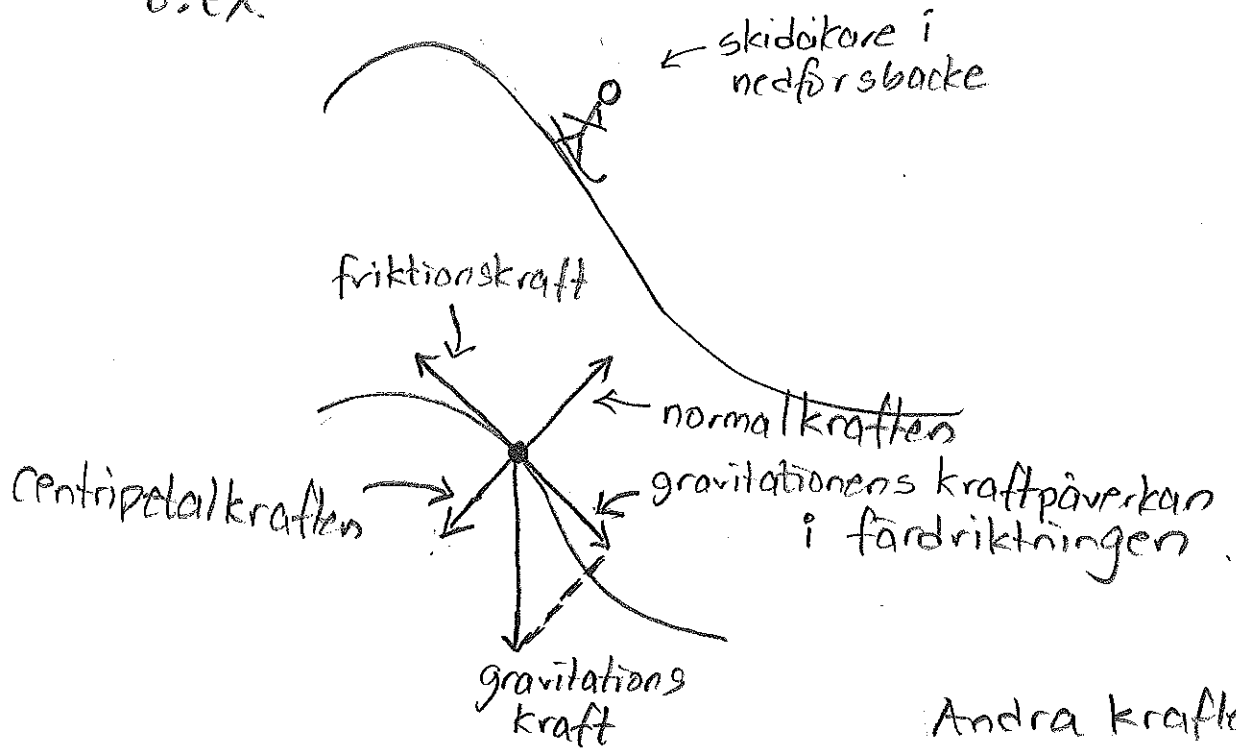
$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \begin{matrix} \text{om } r=h \\ \downarrow \end{matrix} = \frac{1}{3} \pi h^3 \Rightarrow$$

$$V'(t) = \frac{1}{3} \pi \cdot 3h(t)^2 \cdot h'(t)$$

I det ögonblick då $h(t) = 3$ får vi;

$$\frac{1}{2} = \pi \cdot 3^2 \cdot h'(t) \quad \text{dvs.} \quad h'(t) = \underline{\underline{\frac{1}{18\pi} \text{ (m/min)}}}$$

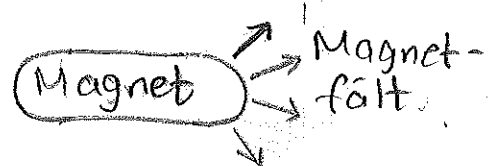
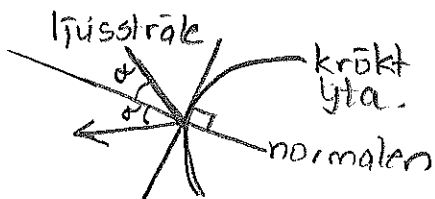
Anm Det finns många tillämpningar där det är viktigt med kunskaper om tangent och normal
t.ex.



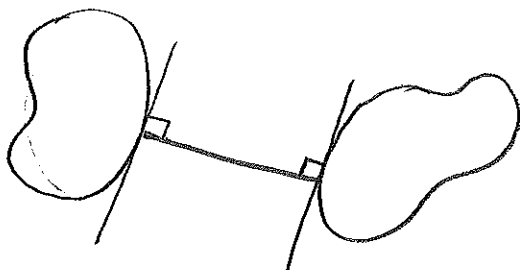
Andra krafter som verkar vinkelrätt mot ytor.



Reflektion av ljus



Avstånd mellan kroppar



Mäta flöde

