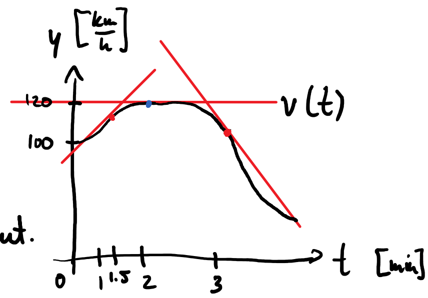
Läsvecka 1

Ex. 1 Antag att $v(t)$ beskriver farten (i km/h) av ett tåg i (icke-likformig) rörelse vid tiden t (i minuter).

Tolka följande information i ord:



a) $v(2) = 120$

Efter 2 min rullar tåget med $120 \frac{km}{h}$.

b) $v'(1.5) = 10$

Efter 90 sekunder ökar tågets fart med $10 \frac{km}{h}$ per minut.

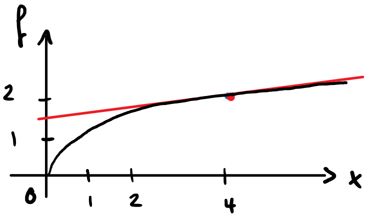
c) $v'(2) = 0$

Efter 2 minuter är tågets fart konstant.

d) $v'(3) = -20$

Efter 3 minuter minskar tågets fart med 20 km/h per minut.

Ex. 2: Beräkna med hjälp av derivatans definition derivatan av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$



a) vid $x = 4$

b) för allmänt $x > 0$.

OBS: Definitionsmängden av f är $D_f = [0, \infty)$.

a) Enligt def. är

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h}$$

Sidoräkning: $$\frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h\,(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{(\sqrt{4+h})^2 - 2^2}{h\,(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{\cancel{4} + \cancel{h} - \cancel{4}}{\cancel{h}\,(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}$$

och dessutom är $x \mapsto \sqrt{x}$ kontinuerlig för $x > 0$, dvs. $\lim_{h \to 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{x}$.

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{\lim_{h \to 0}(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2}{h\,(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{h} - \cancel{x}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

OBS.: Derivatan $f'(x)$ blir obegränsat stort när $x \searrow 0$.

Anm: $x \searrow 0$ betyder "x går mot noll från höger/uppifrån"

Alternativt skriver man också $x \to 0+$.

När x går mot noll från vänster/nerifrån skriver man $x \nearrow 0$ eller $x \to 0-$.

Ex.3: Låt $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$, $x > 0$.

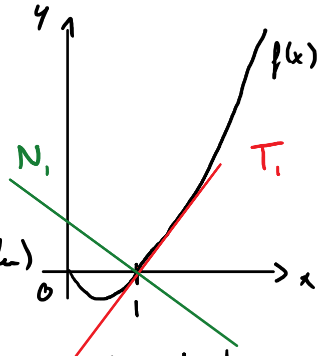
a) Beräkna (med hjälp av våra tidigare beräkningar och linjäritet, Sats 6.5.1) derivatan där $x = 1$.

b) Beräkna tangenten till kurvan i punkten med x-koordinat 1.

c) Beräkna normalen till kurvan i punkten med x-koordinat 1.

a) $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - \sqrt{x}) \overset{\text{Sats 6.5.1}}{=} \frac{d}{dx} x^3 - \frac{d}{dx}\sqrt{x} \overset{\text{Sats 6.2.2}}{=} 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{5}{2}$.



Sats 6.2.2: $\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$ för heltal $n \in \mathbb{Z}$.

b) Tangenten i $x = a$ har samma funktionsvärde och lutning där som kurvan ($T_a(a) = f(a)$, $T_a'(x) = f'(a)$).

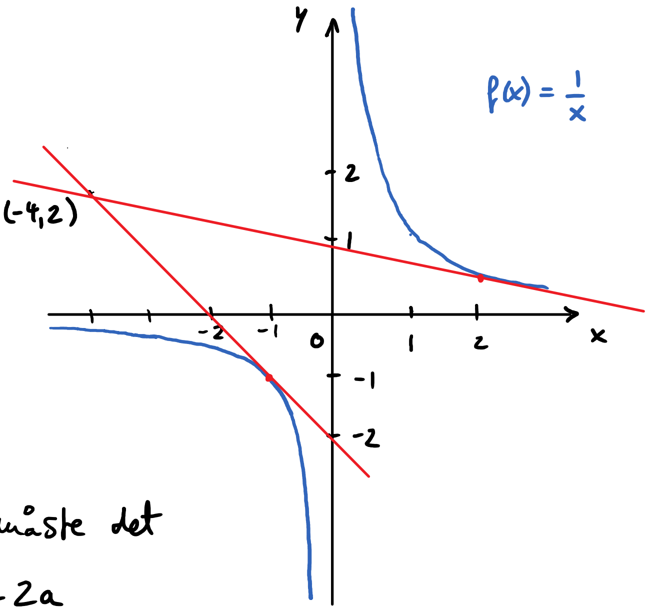
T_a: $f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a} \Leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x-a)$ (enpunktsformeln)

T_1: $y - f(1) = y - 0 = f'(1)(x-1) = \frac{5}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$.

c) En linje som är vinkelrät mot $\ell: y = cx + m$ har lutningskoefficient $-\frac{1}{c}$.

N_1: $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$ (då $f(1) = 0$, $f'(1) = \frac{5}{2}$).

Ex.4* Vilka tangenter till kurvan $f(x) = \frac{1}{x}$ går genom punkten $(x,y) = (-4,2)$?



Låt oss först räkna fram tangenten i godtyckligt $a \neq 0$ ($D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

$f'(x) = \frac{d}{dx} x^{-1} \overset{\text{Sats 6.2.2}}{=} (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$.

T_a: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$\Leftrightarrow y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) = -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a}$

$\Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}}$

För att punkten $(-4,2)$ ligger på T_a måste det gälla $2 = -\frac{1}{a^2}(-4) + \frac{2}{a} \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} 2a^2 = 4 + 2a$

$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ eller $a = 2$.

Svar: Tangenterna T_{-1} och T_2 går genom punkten $(-4,2)$.