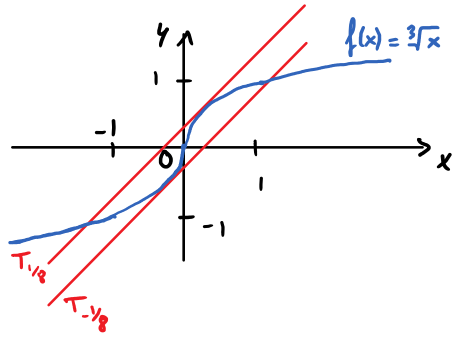
① (a) Utgå ifrån derivatans definition och beräkna derivatan till funktionen $f(x)=\sqrt[3]{x}$.
Är f deriverbar för alla $x\in\mathbb{R}$?

Ledning: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ (konjugatregeln)

(b) För vilka $c\in\mathbb{R}$ är linjen $\ell: y=\frac{4}{3}x+c$ en tangent till kurvan (och i vilken punkt då)?



(a) $D_f=\mathbb{R}$ och enligt def. av derivatan finns den om följande gränsvärde finns: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Låt oss först förenkla differenskvoten:

$$\frac{f(x+h)-f(h)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x+h}^{\,2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^{\,2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{x+h}^{\,2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^{\,2}\right)}=\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt[3]{x+h}^{\,2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^{\,2}\right)}$$

OBS: Vi måste förutsätta $x\neq0$ för att kunna låta $h\to0$!

Och $x\mapsto\frac{1}{x}$ är kontinuerlig för $x\neq0$, $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ kontinuerlig, $x\mapsto x^2$ kont.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}\;1}{\cancel{h}\left(\sqrt[3]{x+h}^{\,2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^{\,2}\right)}\overset{\text{kont.}}{=}\frac{1}{\lim\limits_{h\to0}\left(\sqrt[3]{x+h}^{\,2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^{\,2}\right)}$$
$$\overset{\text{kont.}}{=}\frac{1}{\sqrt[3]{x}^{\,2}+\sqrt[3]{x}^{\,2}+\sqrt[3]{x}^{\,2}}=\frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Vi ser att $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^{2/3}}=+\infty$, dvs. $f'(0)$ finns inte.

Alternativt: $f(x)=x^{1/3}$, Sats 6.2.2 för rationell exponent ger $f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-2/3}$.

(b) För att $y=\frac{4}{3}x+c$ kan vara en tangent i $x=a$ måste riktningskoefficienten $\frac{4}{3}$ vara lika med $f'(a)$: $f'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a}^{\,2}}=\frac{4}{3}\iff\sqrt[3]{a}^{\,2}=\frac{1}{4}\iff\sqrt[3]{a}=\pm\frac{1}{2}\iff a=\pm\frac{1}{8}$

- $a=\frac{1}{8}$ ger $f(a)=\frac{1}{2}$ och tangenten $T_{1/8}$: $y-f(\frac{1}{8})=f'(\frac{1}{8})(x-\frac{1}{8})\iff y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$
- $a=-\frac{1}{8}$ ger $f(a)=-\frac{1}{2}$ — " — $T_{-1/8}$: $y+\frac{1}{2}=\frac{4}{3}(x+\frac{1}{8})\iff y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$

Svar: För $c=\pm\frac{1}{3}$ blir det tangenten i punkten $(\frac{1}{8},\frac{1}{2})$ resp. $(-\frac{1}{8},-\frac{1}{2})$.

② Bestäm $a,b\in\mathbb{R}$ så att $g(x)=\begin{cases}-(x+a)^2 & \text{för } x\leq1\\ b\sqrt{x} & x>1\end{cases}$ är deriverbar (för alla $x\in\mathbb{R}$).

OBS: $g_1(x)=-(x+a)^2=-x^2-2ax-a^2$ är deriverbar för alla x och $g_2(x)=b\sqrt{x}$ är deriverbar för $x>0$ $(D_{g_2}=[0,\infty))$.

Dvs. g är deriverbar för alla $x\neq1$. Hur ser det ut i $x=1$?

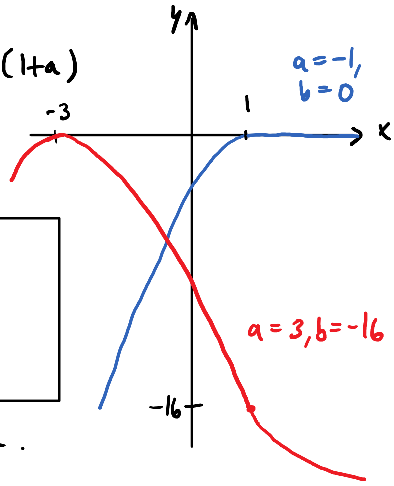
- g är kont. i $x=1$ om $g_-(1)=\lim\limits_{x\to1-}g(x)=g_1(1)=-(1+a)^2$ och $g_+(1)=g_2(1)=b$ är lika. dvs. $b=-(1+a)^2$
- Om g är kont. är den deriverbar i $x=1$ om $g'_-(1)=(g_1)'_-(1)=g_1'(1)=\underbrace{-2x-2a}_{=g_1'(x)}\Big|_{x=1}=-2-2a$ och $g'_+(1)=(g_2)'_+(1)=g_2'(1)=\frac{b}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1}=\frac{b}{2}$ är lika, dvs. $b=-4(1+a)$

Anm.: $t(x)|_{x=1}$ betyder att termen $t(x)$ ska utvärderas för $x=1$ (vi stoppar alltså in 1 för x).

dvs. f är kontinuerlig och deriverbar i $x=1$ om $(1+a)^2 = -b = 4(1+a)$

$\Leftrightarrow$ $a=-1, b=0$ eller $a=3, b=-16$.

(se bilden till höger)



③* Finns det $c \in \mathbb{R}$ så att $h(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{för } x \le c \\ -x^3 & x > c \end{cases}$ är deriverbar?

<u>OBS</u>: $h_1(x) = x^2 - x - 1$, $h_2(x) = -x^3$ är polynom alltså deriverbara.

I punkten där $x=c$ är $h_1(c) = c^2 - c - 1$, $h_2(c) = -c^3$

och $h'_-(c) = h_1'(c) = 2x-1 \big|_{x=c} = 2c-1$

$h'_+(c) = h_2'(c) = -3x^2 \big|_{x=c} = -3c^2$

För att få h deriverbar i $x=c$ måste alltså $c^3 + c^2 - c - 1 = 0$ (så att $h_1(c) - h_2(c) = 0$)

och $3c^2 + 2c - 1 = 0$ (så att $h'_-(c) - h'_+(c) = 0$)

pq-formeln leder till $3c^2 + 2c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -1$ eller $c = \frac{1}{3}$

För dessa två kandidater får vi $h_1(-1) = 1 = h_2(-1)$ men $h_1(\frac{1}{3}) = -\frac{11}{9} \neq -\frac{1}{27} = h_2(\frac{1}{3})$.

<u>Svar</u>: Bara för $=-1$ blir h deriverbar.

④ Låt $f(x) = 2x\sqrt{|x|} = \begin{cases} 2x\sqrt{x} & \text{för } x \ge 0 \\ 2x\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$.

(a) Beräkna derivatan av $f(x)$ för $x \neq 0$.

<u>Ledning</u>: Beräkna $\frac{d}{dx}[f(x)^2]$ och använd produktregeln.

(b) Är f deriverbar i $x=0$?

(c) Bestäm alla tangenter och normaler till kurvan som har en lutningsvinkel på $v = -60°$ (eller $-\frac{\pi}{3}$ i radianer).

(a) $f^2(x) = 4x^2|x| = \begin{cases} 4x^3 & \text{om } x \ge 0 \\ -4x^3 & x < 0 \end{cases}$ då $|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

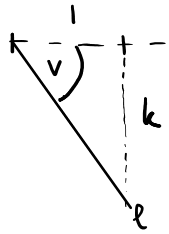
$\frac{d}{dx} f^2(x) = \begin{cases} 12x^2 & \text{om } x > 0 \\ -12x^2 & x < 0 \end{cases}$, $\frac{d}{dx}(f \cdot f) = f' \cdot f + f \cdot f' = 2 \cdot f \cdot f'$

dvs. $f'(x) = \frac{1}{2f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f^2(x) = \begin{cases} \frac{12x^2}{4x\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} & \text{om } x > 0 \\ \frac{-12x^2}{4x\sqrt{-x}} = 3\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases} = 3\sqrt{|x|}$, $x \neq 0$

(b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0+} \frac{2h\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0+} 2\sqrt{h} = 0 \\ \lim\limits_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0-} \frac{2h\sqrt{-h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0-} 2\sqrt{-h} = 0 \end{array}\right\}$ f är deriverbar i $x=0$ och $f'(0) = 0$.

(a)+(b) ger $f'(x) = 3\sqrt{|x|}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

(c)



$\ell: y = kx + c$. Riktningskoeff. kan alltså beräknas genom $\tan(v) = \frac{k}{1}$. Här: $k = \frac{\sin(-\frac{\pi}{3})}{\cos(-\frac{\pi}{3})} = \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}$

- Riktningskoeff. k_T av en tangent till $f(x)$ i $x=a$ är $f'(a)$ och $f'(a) = 3\sqrt{|a|} \geq 0 > -\sqrt{3}$ alltså $f'(a) = -\sqrt{3}$ går inte att uppfylla.

- Riktningskoeff. k_N av normalen i $x=a$ är $k_N = -\frac{1}{f'(a)}$ och den är lika med $-\sqrt{3}$ om $-\frac{1}{3\sqrt{|a|}} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{|a|} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{27}$.

Svar: Normalerna i $x = \pm\frac{1}{27}$ har lutningsvinkel $-\pi/3$.

5 (a) Beräkna derivatan till $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^2+1} =: \frac{p(x)}{q(x)}$

(b) Beräkna derivatan till $g(x) = \frac{(x^2+x)\sqrt{x}}{x+1}$ där den existerar.

(a)
$$f'(x) \overset{\text{kvot-reg.}}{=} \frac{p'(x)\cdot q(x) - p(x)\cdot q'(x)}{q(x)^2} = \frac{(3x^2-4x+1)(x^2+1) - (x^3-2x^2+x-3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x^4+2x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = 1 + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

OBS: Polynomdivision ger $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x^2+1} = x - 2 - (x^2+1)^{-1}$
$$f'(x) \overset{\text{ked.reg.}}{=} 1 + (x^2+1)^{-2}\cdot 2x = 1 + \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

(b) OBS: $D_g = [0,\infty)$ och för $x > 0$ får vi
$$\frac{d}{dx}\left((x^2+x)\sqrt{x}\right) \overset{\text{PR}}{=} (2x+1)\sqrt{x} + (x^2+x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\left(2x+1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right)$$
$$g'(x) \overset{\text{kvot}}{=} \frac{\sqrt{x}\left(\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right)\cdot(x+1) - \overbrace{(x^2+x)}^{x(x+1)}\sqrt{x}\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{(x+1)}\sqrt{x}\left(\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}-x\right)}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{x}\cdot\frac{3}{2}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

OBS: $g(x) = \frac{x(x+1)\sqrt{x}}{x+1} = x\sqrt{x} = x^{3/2}$

$g'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.