(1) Bestäm definitionsmängden och beräkna derivatan av följande funktioner:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+3x-4)^7}$

(b) $g(x) = (2x^2-x-1)\sqrt{x^4+x}$

(c) $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2t^2-8}}$

(a) $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ där $f_1(x) = x$, $f_2(x) = (x^2+3x-4)^7 = p^7$ där $p(x) = x^2+3x-4$.

f är inte definerad för x så att $f_2(x) = 0 \iff x^2+3x-4 = 0 \iff x_1 = 1,\ x_2 = -4$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -4,\ x \neq 1\}$

$f_1'(x) = 1$, $f_2'(x) = \dfrac{df_2}{dp} \cdot \dfrac{dp}{dx} = 7 \cdot p^6 \cdot p'(x) = 7 \cdot (x^2+3x-4)^6 \cdot (2x+3)$

$$f'(x) = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{(f_2)^2} = \frac{1 \cdot (x^2+3x-4)^7 - x \cdot 7 \cdot (2x+3)(x^2+3x-4)^6}{((x^2+3x-4)^7)^2}$$

$$= \frac{(x^2+3x-4) - 7x(2x+3)}{(x^2+3x-4)^8} = -\frac{13x^2+18x+4}{(x^2+3x-4)^8}$$

(b) $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ där $g_1(x) = 2x^2-x-1$ och $g_2(x) = \sqrt{x^4+x} = \sqrt{q}$ där $q = x^4+x$

$x^4+x \geq 0 \iff x^4 \geq -x \iff$
- $x > 0$ och $x^3 \geq -1 \iff x \in (0,\infty)$, $\iff x \in D_g$
- eller $x = 0$ eller $x = 0$,
- $x < 0$ och $x^3 \leq -1$, $x \in (-\infty,-1]$

där $D_g = (-\infty,-1] \cup [0,\infty)$
$= \mathbb{R} \setminus (-1,0)$

$g_1'(x) = 4x-1$, $g_2'(x) = \dfrac{dg_2}{dq} \cdot \dfrac{dq}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{q}} \cdot (4x^3+1) = \dfrac{4x^3+1}{2\sqrt{x^4+x}}$

$$g'(x) = g_1' g_2 + g_1 g_2' = (4x-1)\sqrt{x^4+x} + (2x^2-x-1) \cdot \frac{4x^3+1}{2\sqrt{x^4+x}} \quad \text{för } x \in \underbrace{D_g \setminus \{-1,0\}}_{= (-\infty,-1) \cup (0,\infty)}$$

$=$

(c) $h(t) = \dfrac{1}{h_1(t)}$ där $h_1(t) = \sqrt[3]{2t^2-8} = (2t^2-8)^{1/3}$

är odefinerad när $h_1(t) = 0 \iff 2t^2 = 8 \iff t = \pm 2$, alltså $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Sats 6.2.3: för g deriverbar i x med $g(x) \neq 0$ gäller $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{-g'(x)}{g^2(x)}$

eller kedjeregeln ger

$h_1(t) = \sqrt[3]{p(t)}$ där $p(t) = 2t^2-8 \implies \dfrac{d}{dt} h_1 = \dfrac{dh_1}{dp} \cdot \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{3}(2t^2-8)^{-2/3} \cdot (4t)$

$$h'(t) = -\frac{h_1'(t)}{(h_1(t))^2} = -\frac{\frac{4t}{3}(2t^2-8)^{-2/3}}{(2t^2-8)^{\frac{1}{3} \cdot 2}} = -\frac{4t}{3} \cdot (2t^2-8)^{-4/3}$$

② Beräkna derivatan av följande funktioner:

(a) $f(t) = \ln\left((t^2+1)^4\right)\cdot e^{t^2}$

(b) $= g3\tan(1-s^2) - 2\cos^2(1-s)\cdot\sin(3s+1)$

(c) $h(x) = e^{2\sin^2(3x)}$

(a) $f(t) = f_1(f_2(t))\cdot f_3(f_4(t))$ där $f_1(y) = \ln(y)$, $f_2(t) = (t^2+1)^4$

$f_3(y) = e^y$, $f_4(t) = t^2$

$$f_1'(y) = \frac{df_1}{dy} = \frac{1}{y} \quad \left[z = \ln(y) \iff y = e^z \overset{\frac{d}{dy}}{\underset{\text{kedjeregel}}{\iff}} 1 = e^z\cdot z' \iff z' = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}\right]$$

$$f_2'(t) = \frac{df_2}{dt} = 4(t^2+1)^3\cdot(2t)$$

$$f_3'(y) = e^y, \quad f_4'(t) = 2t.$$

$$f'(t) = \left[\frac{d}{dt} f_1(f_2(t))\right] f_3(f_4(t)) + f_1(f_2(t))\frac{d}{dt} f_3(f_4(t))$$

$$= \frac{1}{(t^2+1)^{\cancel{4}}}\cdot 4\cancel{(t^2+1)^3}\cdot 2t\cdot e^{t^2} + \ln\left((t^2+1)^4\right)\cdot e^{t^2}\cdot(2t).$$

$$= e^{t^2}\left(\frac{8t}{t^2+1} + 2t\cdot\ln\left((t^2+1)^4\right)\right)$$

(b) $g(s) = 3\cdot\tan(1-s^2) - 2\cos^2(1-s)\cdot\sin(3s+1)$

$$\frac{d}{dv}\tan(v) = 1+\tan^2(v), \quad \frac{d}{dv}\cos^2(v) = 2\cdot\cos(v)\cdot(-\sin(v)), \quad \frac{d}{dv}\sin(v) = \cos(v)$$

$$g'(s) = 3\cdot\left(1+\tan^2(1-s^2)\right)\cdot(-2s) - 2\Big[-2\sin(1-s)\cdot\cos(1-s)\cdot\overset{\text{inre derivat}}{(-1)}\cdot\sin(3s+1)$$
$$+ \cos^2(1-s)\cdot\cos(3s+1)\cdot 3\Big]$$

$$= -6s\left(1+\tan^2(1-s^2)\right) - 4\sin(1-s)\cos(1-s)\cdot\sin(3s+1) - 6\cos^2(1-s)\cos(3s+1)$$

(c) $h(x) = e^{2\sin^2(3x)} = e^{\varphi(y(x))} = h(\varphi(y(x)))$

där $\varphi(y) = 2y^2$ och $y(x) = \sin(3x)$

$\varphi'(y) = 4y$, $y'(x) = 3\cdot\cos(3x)$

$$h'(x) = e^{2\cdot\sin^2(3x)}\cdot\left(2\cdot\sin^2(3x)\right)\cdot 3\cdot\cos(3x) = 6\sin^2(3x)\cos(3x)\,e^{2\sin^2(3x)}.$$

$$\| \quad = \frac{de^\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

(3) Betrakta kurvan $y=(x+2)^{x^2}$, $x \geq -2$.

(a) Beräkna tangenten i punkten där $x=1$.

(b) Existerar högerderivatan i $x=-2$?

(c) Vilken lutningsvinkel har normalen i punkten där $x=-1$?

$f(x) := (x+2)^{x^2} = \left(e^{\ln(x+2)}\right)^{x^2} = e^{x^2 \cdot \ln(x+2)} = e^{u(x)}$ där $u(x) = x^2 \cdot \ln(x+2)$

$u'(x) = 2x \cdot \ln(x+2) + x^2 \cdot \frac{1}{x+2}$

$f'(x) = \frac{d e^{u(x)}}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx} = e^{u(x)} \cdot u'(x) = e^{x^2 \ln(x+2)} \cdot \left(2x \ln(x+2) + \frac{x^2}{x+2}\right)$

$= (x+2)^{x^2} \left(2x \ln(x+2) + \frac{x^2}{x+2}\right)$

$f'(1) = 3^{(1^2)} \cdot \left(2 \cdot 1 \cdot \ln(3) + \frac{1}{3}\right) = 6\ln(3) + 1$, $f(1) = (1+2)^{1^2} = 3$

$f'(-1) = 1^1 \left(-2 \cdot \ln(1) + \frac{1}{1}\right) = 1$

(a) $T: \; y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 3 = (1 + 6\ln(3))(x-1) \Leftrightarrow y = (1+6\ln(3))x + 2 - 6\ln(3)$

(c) tangenten i $x=-1$ har riktningskoeff. $k_T = f'(-1) = 1$,
normalen " " $k_N = -\frac{1}{f'(-1)} = -1$.

$\Rightarrow$ normalen har lutningsvinkel $v = -\frac{\pi}{4}$ (därför att $\tan(v) = k_N$)

(b) $f'_+(-2) = \lim_{h \to 0+} \frac{(\cancel{-2}+h+\cancel{2})^{(-2+h)^2} - (-2+2)^4}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h^{(4-4h+h^2)}}{h} = \lim_{h \to 0+} \underbrace{h^{3-4h+h^2}}_{\text{ligger mellan } h^2 \text{ och } h^3 \text{ för små } h>0} \overset{\text{instängningsregeln}}{=} 0$.

(4) Har exponentialfunktionen med basen $a>0$, dvs. kurvan $y=a^x$, en tangent som går genom origon?
I vilken punkt i så fall?

$g(x) = a^x = e^{\ln a \cdot x} \rightarrow g'(x) = \ln(a) \cdot a^x$. Tangenten i $x=b$ ges av

$T_b: \; y - a^b = \ln(a) \cdot a^b (x-b) \Leftrightarrow y = \ln(a)\, a^b \cdot x + a^b (1 - b \cdot \ln(a))$

Den går genom origon $(0,0) \Leftrightarrow 1 - b\ln(a) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{\ln(a)}$

$g\left(\frac{1}{\ln(a)}\right) = e^{\ln(a) \cdot \frac{1}{\ln(a)}} = e$. Det är alltså tangenten i punkten $\left(\frac{1}{\ln(a)}, e\right)$ som går genom origon.

(5) Låt oss glömma enhetscirkeln och bevisa följande med hjälp av derivatan:

(a) Visa att $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ är en konstant funktion och utvärdera $f(0)$ för att härleda den trigonometriska ettan.

(b) Visa på samma sätt att $\cos 2x = 2\cos^2(x) - 1$, med hjälp av regeln $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

(a) $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) \rightarrow f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)) = 0$

$\rightarrow f$ är en konstant funktion och har värdet $f(0) = \sin^2(0) + \cos^2(0) = 0^2 + 1^2 = 1$.

(b) $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$g(x) = \cos(2x) - 2\cos^2(x) \rightarrow g'(x) = 2(-\sin(2x)) - 2(2\cos(x)(-\sin(x)))$

$= -2(\sin(2x) - 2\sin(x)\cos(x)) = 0$

$\rightarrow g$ är konstant, $g(0) = \cos(0) - 2\cos^2(0) = -1$