① Visa med hjälp av derivatan att:

(a) $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) & \text{för } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan(x) & x < 0 \end{cases}$

(b) $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ för $x \in [-1, 1]$

(a) $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$, då $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$ för alla $x \neq 0$. f är alltså konstant på $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$.

- $f(1) = 2\arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, då $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1$
- $f(-1) = 2\arctan(-1) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$, då $\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -1$.

(b) $g(x) = \sin(\arccos(x)) - \sqrt{1-x^2}$, $D_g = [-1, 1]$

$g'(x) = \cos(\arccos(x)) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(-\cancel{2}x)$, då $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ för alla $x \in (-1, 1)$ dvs. g är konstant på $(-1, 1)$

$g(0) = \sin(\arccos(0)) - \sqrt{1-0^2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0$ □

$g(1) = \sin(\arccos(1)) - \sqrt{1-1} = \sin(0) = 0$, $g(-1) = \sin(\arccos(-1)) - \sqrt{1-1} = \sin(\pi) = 0$.

[OBS: $\sin(v) = \sqrt{1-\cos^2(v)}$ för $v \in [0, \pi]$ dvs $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$ för motsvarande x värden]

---

② Beräkna (a) derivatan av $f(s) = \ln(\ln(s^2))$, $s \neq 0$

(b) derivatan av $g(t) = \frac{1}{2+\arctan(t^2)}$ och

(c) $y'(0)$ för $y(x)$ som uppfyller $y^3 + \sqrt{y} \cdot x = (x+1)^2$.

(a) Vi kan skriva det som $f(u) = \ln(u)$ där $u = \ln(v)$ och $v = s^2$

$\frac{df}{ds} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{v} \cdot 2s$, då $\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{y}$.

$= \frac{1}{\ln(s^2)} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot 2s = \frac{2}{s\ln(s^2)} = \frac{1}{s\ln(s)}$, då $\ln(a^b) = b \cdot \ln a$

OBS: $f(s) = \ln(2\ln(s)) = \ln(2) + \ln(\ln(s))$, då $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

ger samma resultat lite enklare.

(b) Skriver $g(t)$ som $g(u) = \frac{1}{u}$ där $u = 2 + \arctan(v)$ och $v = t^2$.

$\frac{dg}{dt} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = \left(-\frac{1}{u^2}\right) \cdot \frac{1}{1+v^2} \cdot 2t = -\frac{2t}{(1+t^4)(2+\arctan(t^2))^2}$

(c) Implicit derivering, dvs. derivera båda led med avseende på x ger (kedje-/produktregel)

$3y^2 \cdot y' + \sqrt{y} \cdot 1 + \frac{y'}{2\sqrt{y}}\, x = 2(x+1)$. Vi behöver $y(0)$ och ser ifrån ekvationen

att $y(0)^3 + \cancel{\sqrt{y(0)} \cdot 0} = (0+1)^2 \Leftrightarrow y(0) = \sqrt[3]{1} = 1$, vilket ger

$3 \cdot 1^2 \cdot y'(0) + \sqrt{1} + \cancel{\frac{y'(0)}{2\sqrt{1}} \cdot 0} = 2(0+1) \Leftrightarrow y'(0) = \frac{1}{3}$.

③ Betrakta kurvan $y(x)$ som ges implicit av

$x^2 - 4x + y^2 + 3y - 3 = y^3$. (det är uppg. 6.27 i boken, med lite tilltugg)

(a) I vilka två punkter $A = (x_A, 1)$ och $B = (x_B, 1)$ skär kurvan linjen $y = 1$? (ordna dessa så att $x_A < x_B$).

(b) Bestäm tangenten i A och normalen i B till kurvan.

(c) I vilken annan punkt skär tangenten i A kurvan?

(d) Var har kurvan en vågrät tangent?

(a) om $y = 1$ stoppas in i ekvationen fås $x^2 - 4x + \cancel{1} + \cancel{3} - \cancel{3} = \cancel{1}^{\,0} \Leftrightarrow x(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 4$, dvs. $A = (0, 1)$, $B = (4, 1)$

(b) Implicit derivering ger (med avseende på x!) $\quad 2x - 4 + 2y \cdot y' + 3y' = 3y^2 \cdot y'$

- för punkten $(x,y) = (0,1) = A$ fås $2 \cdot \cancel{0} - 4 + 2 \cdot 1 \cdot y'(0) + \cancel{3y'(0)} = \cancel{3 \cdot 1^2 \cdot y'(0)}\ 0$

  och $y'(0) = \frac{4}{2} = 2$

- för punkten $(x,y) = (4,1) = B$ fås $2 \cdot 4 - 4 + 2 \cdot 1 \cdot y'(4) + \cancel{3 \cdot y'(4)} = \cancel{3 \cdot 1^2 \cdot y'(4)}\ 0$

  och $y'(4) = \frac{-4}{2} = -2$

Vi får alltså T_A: $y - 1 = y'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$ som tangent i A

och N_B: $y - 1 = -\frac{1}{y'(4)}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$ som normal i B

till kurvan.

(c) För att hitta fler punkter på kurvan som också ligger på T_A stoppar vi in $y = 2x+1$ i ekvationen och får

$$x^2 - 4x + (2x+1)^2 + 3(2x+1) - 3 = (2x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \cancel{4x} + 4x^2 + \cancel{4x} + \cancel{1} + \cancel{6x} + \cancel{3} - \cancel{3} = 8x^3 + 12x^2 + \cancel{6x} + \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 7x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(7 + 8x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = -\tfrac{7}{8} \text{ alltså } C = \left(-\tfrac{7}{8}, -\tfrac{3}{4}\right)$$

ligger också på kurvan och tangenten.

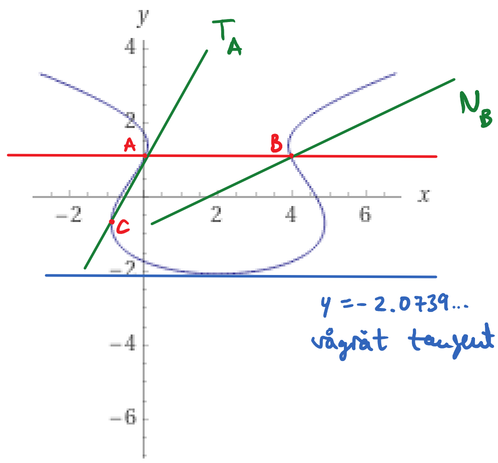
(d) Från ekvationen

$$2x - 4 + 2y \cdot y' + 3y' = 3y^2 \cdot y'$$

ser vi att $y'(x) = 0$ leder till

$$2x - 4 + 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Dvs. vi har en vågrät tangent där $x = 2$.



④ Bestäm lokala maxima / minima samt (om dessa existerar) största och minsta värde för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2} = f_1(x) & -5 \le x \le 3 \\ x+1 = f_2(x) & 3 < x \le 4 \\ -e^{-x} = f_3(x) & 4 < x \end{cases} \qquad D_f = [-5, \infty)$$

Vi vet att det finns tre kandidater för lokala extrempunkter
- kritiska punkter, dvs. där f är deriverbar och $f'(x) = 0$
- ändpunkter av def. mängden [här: -5, (∞)]
- singulära punkter, dvs. där f inte är deriverbar [här möjligtvis: 3, 4]

OBS: • $\sqrt{25-x^2}$ är definerad för $x \in [-5,5]$ och deriverbar på $(-5,5)$
• $x+1$, $-e^{-x}$ är definerade och deriverbara för alla $x \in \mathbb{R}$

• Är f kontinuerlig? Bitarna är det och

$$f(3) = f(3-) = \lim_{x \nearrow 3} f(x) = f_1(3-) = f_1(3) = \sqrt{25-9} = 4, \quad f(3+) = f_2(3+) = f_2(3) = 4$$

$$f(4) = f(4-) = f_2(4) = 5 \quad \text{men} \quad f(4+) = f_3(4+) = f_3(4) = -e^{-4} = -\frac{1}{e^4} \ne 5$$

f är okontinuerlig i $x = 4$, kontinuerlig i $x \in [-5,\infty) \setminus \{4\}$

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}(-2x) & -5 < x < 3 \\ f_2'(x) = 1 \quad \text{för} & 3 < x < 4 \\ f_3'(x) = e^{-x} & 4 < x \end{cases}$$

dessutom $f'_-(3) = (f_1)'_-(3) = f_1'(3) = -\frac{3}{4}$

$f'_+(3) = (f_2)'_+(3) = f_2'(3) = 1$

dvs. f har ett hörn i $x = 3$.

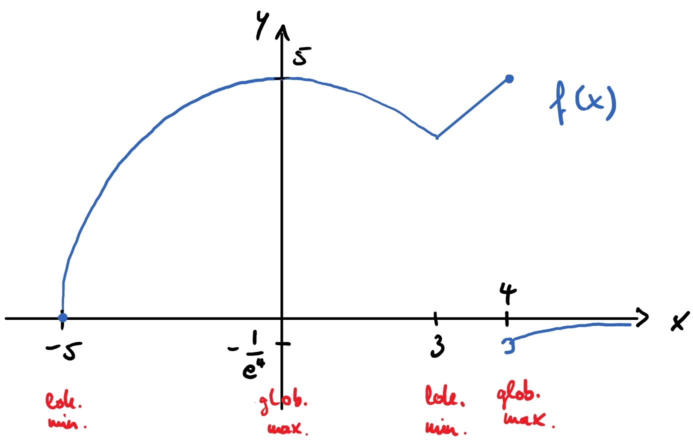
$f'(x) = 0$ bara möjligt för första biten och där när $x = 0$.

$f(-5) = 0$ och $f(4) = 5 = f(4-)$, $f(4+) = -\frac{1}{e^4}$

Teckenschema

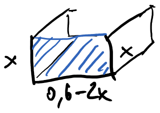
x	-5		0		3		4	$4+$		(∞)
$f'(x)$	$/ +\infty$	$+$	0	$-$	$-\frac{3}{4} / 1$	$+$	finns ej	$\cdot e^{-4}$	$+$	0
$f(x)$	0	↗	5	↘	4	↗	5	e^{-4}	↗	0

- $f(-5) = 0$ är ett lokalt minimum.
- $f(0) = 5$ är ett lokalt maximum
  (f' byter tecken $+$ till $-$)
- $f(3) = 4$ är ett lokalt min
  (f' byter tecken $-$ till $+$)
- $f(4) = 5$ är ett lokalt max.
- $f(0) = f(4) = 5$ är största värdet, ett minsta värde antas inte.



(5) En plåt har längd 3m och bredd 0.6 m.
Parallellt med dess långsidor ska den bockas så att det blir en ränna med rektangulärt tvärsnitt. Hur långt ifrån kanterna skall plåten bockas så att rännan rymmer så mycket vatten som möjligt?

Volymen är maximal då tvärsnittet är det (längden är konstant) och tvärsnittet är rektangulärt med area



$A(x) = x\cdot(0.6-2x)$ samt $D_A = [0, 0.3]$; $A(0)=0$, $A(0.3)=0$

$A'(x) = 0.6 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.15$

Dvs. $x = 0.15$ är den enda kritiska punkten.

Då $A'(x)$ byter tecken från + till − i $x=0.15$ är $A(0.15) = 0.045$ [m^2] ett lokalt maximum.

Teckenschemat

x	0		0.15		0.3
$A'(x)$	0.6	$+$	0	$-$	-0.6
$A(x)$	0	$\nearrow$	0.045	$\searrow$	0

visas att det är samtidigt ett globalt maximum, alltså funktionens största värde.

<u>OBS</u>: $A(x) = -2x^2 + 0.6x$
$= -2(x-0.15)^2 + 0.045$ är symmetrisk kring $x = 0.15$ och man ser direkt att $x=0.15$ ger funktionens största värde (en nedåt öppen parabel).