① Undersök följande funktion på lokala och globala extrempunkter; på vilka intervall är funktionen (strängt) växande/avtagande?

$$f(x) = \begin{cases} 5-x & & x<0 \\ -x^3 & \text{för} & 0 \le x \le 1 \\ (x-3)^2 & & x>1 \end{cases}, \quad D_f = [-5, \infty)$$

- $f$ är en funktion som är bitvis definerad och alla grenar är polynom dvs. för $x \in D_f \setminus \{0,1\}$ är $f$ deriverbar.
- Randpunkter: $f(-5) = 10$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x-3)^2 = +\infty$

  $\to$ $f$ är obegränsad uppåt dvs. ett största värde finns inte.
- $f_-(0) := \lim_{x\to 0-} f(x) = 5 \neq f_+(0) = 0 = f(0)$ och $f_-(1) = f(1) = -1 \neq f_+(1) = 4$
  dvs. $f$ ej kontinuerlig ($\to$ ej deriverbar) i $x=0$ och $x=1$.
- $$f'(x) = \begin{cases} -1 & & x<0 \\ -3x^2 & \text{för} & 0<x<1 \\ 2(x-3) & & x>1 \end{cases}$$ och $f'_-(0) = \frac{d}{dx}(5-x)\Big|_{x=0} = -1\Big|_{x=0} = -1$

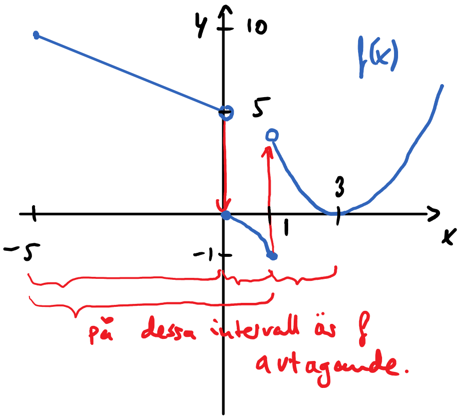
  då $5-x$ är deriverbar, dvs. vänsterderivata i $x=0$ är samma som derivata.

  $f'_+(0) = -3x^2\Big|_{x=0} = 0$,

  $f'_-(1) = -3$, $f'_+(1) = -4$.

$\Rightarrow$ $x=3$ är den enda kritiska punkten.

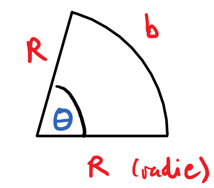
| $x$ | $-5$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-1$ | $-$ | $-1/0$ | $-$ | $-3/-4$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\infty$ |
| $f(x)$ | $10$ | $\searrow$ | $5/0$ | $\searrow$ | $-1/4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\infty$ |




$f$ är (strikt) avtagande på $[-5,0)$ och $[0,1]$ och $(1,3]$,
$f$ är (strikt) växande på $[3,\infty)$

OBS.: Då $f$ "hoppar neråt" i $x=0$ och uppåt i $x=1$ är den avtagande på $[-5,1]$ men inte på t.ex. $[0,3)$.
$f(-5)=10$ är ett lokalt maximum, i $x=0$ finns ingen lok. extrempunkt. $f(1)=-1$ är ett lokalt minimum, $f(3)=0$ med. Minsta värdet är $f(1)=-1$, ett största värde antas inte på $D_f$.

② Vi ska klippa en cirkelsektor i plåt och maximera arean för given omkrets på 2 (LE).




Ledning: För given radie $R$ och öppningsvinkel $\theta$ (i rad) har motsvarande cirkelavsnitt längd $b = \cancel{2\pi} R \cdot \frac{\theta}{\cancel{2\pi}} = \theta \cdot R$.

Omkretsen av cirkelsektorn ges av $2R + b$ och den ska vara lika med 2 (LE).
$\Rightarrow$ $b = 2 - 2R = 2(1-R)$ Arean är $A = \cancel{\pi} R^2 \cdot \frac{\theta}{2\cancel{\pi}} = \frac{R \cdot b}{2}$ (då $\theta = \frac{b}{R}$)

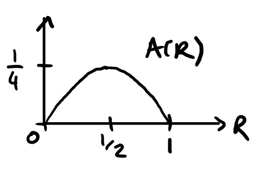
Med omkrets villkoret fås då $A(R) = \frac{R}{\cancel{2}} \cancel{2}(1-R) = R(1-R) = R - R^2$.

OBS: $D_A = (0,1)$ (då $R, b \ge 0$ och varken $R=0$ eller $R=1$ ger en cirkelsektor)

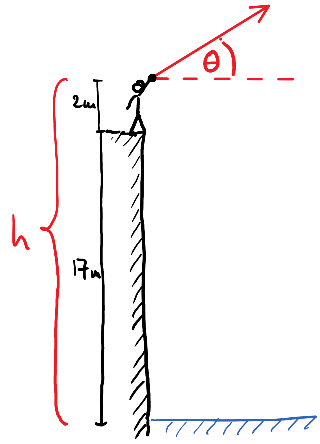
$A'(R) = 1 - 2R = 0 \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}$ (den enda kritiska punkten)

| $R$ | $(0)$ | | $1/2$ | | $(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'(R)$ | $+1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-1$ |
| $A(R)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1/4$ | $\searrow$ | $0$ |

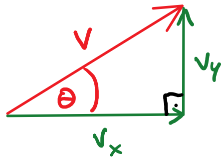
Svar: Optimalt är $R = \frac{1}{2}$ som ger största area på $\frac{1}{4}$ LE$^2$.



③* Timo står på en 17m hög klippa och vill kasta en sten så långt som möjligt ut på sjön. Stenen lämnar hans hand 2m över marken med en fart på 30 m/s. Vilken vinkel $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ (se bild) är optimal? Vi antar att sjön ligger helt platt och försummar luftmotståndet.




<u>Ledningar:</u>




- När stenen lämnar handen med fart $v = 30 \left(\frac{m}{s}\right)$ har den fart
  $v_y = \sin\theta \cdot v$ i y-led och
  $v_x = \cos\theta \cdot v$ i x-led.

- tyngdkraftsaccelerationen $g = 9{,}82 \left(\frac{m}{s^2}\right)$ gör att stenens höjd över vattnet vid tid $t$ (i sek) ges av $h(t) = h + v_y \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$, där $h = h(0) = 19$ (m). [iaf tills den landar på vattenytan, jfr. med Ex. 7.6 i boken]
- Beräkna $T$, tiden tills stenen landar, som funktion av $\theta$ och visa att den tillryggalagda distansen i x-led är då
  $$d(\theta) = \frac{v^2}{g}\left[\cos(\theta)\cdot\left(\sin(\theta) + \sqrt{\sin^2(\theta) + \frac{2gh}{v^2}}\right)\right].$$
- Vi vill alltså maximera $f(u) = \sqrt{1-u^2}\cdot\left(u + \sqrt{u^2+c}\right)$ där $u := \sin(\theta) \in [0,1)$ och $c := \frac{2gh}{v^2}$.
  Visa att $u = \frac{1}{\sqrt{c+2}}$ är en kritisk punkt för funktionen $f$.
  (faktiskt den enda på $[0,1)$, $f'(u)\begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases}$ för $\begin{matrix} u < \\ u = \\ u > \end{matrix}\Bigg\} \frac{1}{\sqrt{c+2}}$, utan bevis)
- Beräkna vinkeln $\theta$ och motsvarande distans.

---

Tiden $T$ uppfyller $h(T) = h + v_y \cdot T - \frac{1}{2} g T^2 = 0$,

$$T_{1/2} = \frac{-v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{-g} = \frac{v}{g}\left(\sin\theta \mp \sqrt{\sin^2(\theta) + \underbrace{\frac{2gh}{v^2}}_{>0}}\right)$$

<u>OBS</u>: − tecknet ger $T < 0$ (vilket inte är relevant)

$$T = \frac{v}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2(\theta) + c}\right) \quad \text{där } c = \frac{2gh}{v^2} > 0.$$

distansen ges då av

$$d(\theta) = v_x \cdot T = \cos\theta \cdot v \cdot T = \frac{v^2}{g}\cos\theta\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2(\theta) + c}\right).$$

Låt oss skriva $u := \sin(\theta)$ (som är entydig $[0, \frac{\pi}{2})$) och observera att $u \in [0,1)$ och $\cos(\theta) = \sqrt{1-u^2}$ (då $\cos(\theta) \geq 0$ för $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$)

Vill alltså maximera funktionen

$$f(u) = \sqrt{1-u^2}\left(u + \sqrt{u^2+c}\right) \quad \text{med avseende på } u \in [0,1).$$

$$f'(u) = \frac{-\cancel{2}u}{\cancel{2}\sqrt{1-u^2}}\left(u + \sqrt{u^2+c}\right) + \sqrt{1-u^2}\left(1 + \underbrace{\frac{\cancel{2}u}{\cancel{2}\sqrt{u^2+c}}}_{>0}\right)$$

$$= \left(u + \sqrt{u^2+c}\right)\left(-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) + \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{u^2+c}}\left(\sqrt{u^2+c} + u\right) = \frac{\left(u + \sqrt{u^2+c}\right)}{\underbrace{\sqrt{1-u^2}}_{>0}\ \underbrace{\sqrt{u^2+c}}_{>0}}\left(-u\sqrt{u^2+c} + (1-u^2)\right)$$

Vi har kommit fram till att $f'(u) = 0$ för $u \in [0,1)$
då och endast då $-u\sqrt{u^2+c} + (1-u^2) = 0$

$$\iff \underbrace{u\sqrt{u^2+c}}_{>0} = \underbrace{1-u^2}_{>0} \iff u^2(\cancel{u^2}+c) = 1-2u^2+\cancel{u^4} \iff u^2(c+2) = 1$$

$$\iff u = \frac{\pm 1}{\sqrt{c+2}} \quad \left(\text{men } -\frac{1}{\sqrt{c+2}} \notin [0,1)\right)$$

Dvs. $u = \frac{1}{\sqrt{c+2}}$ är den enda kritiska punkten och motsvarar ett lokalt (och globalt) maximum på $[0,1)$.

| $u$ | $0 \le u < \frac{1}{\sqrt{c+2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{c+2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{c+2}} < u < 1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(u)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$\theta = \arcsin(u)$ ger att $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2gh}{v^2}+2}}\right)$ är optimalt.

Stoppar man in $h = 19\,m$ och $v = 30\frac{m}{s}$ fås $\theta = 40{,}056\ldots^\circ \approx 40^\circ$
och $d(40^\circ) \approx 109\,m$.

(4) Undersök kurvan som ges av $y = 3\cdot\sqrt[3]{x} - |x|$.
Vas är den växande/avtagande, vilka extrempunkter finns?

$$g(x) = \begin{cases} 3\cdot\sqrt[3]{x} + x & \text{för } x < 0 \\ 3\cdot\sqrt[3]{x} - x & x \ge 0 \end{cases} \quad ; \; D_g = \mathbb{R}$$

- Är $x = 0$ singulär? (För alla andra $x$ är $g$ deriverbar)

$$g'(x) = \begin{cases} x^{-2/3} + 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} & \text{för } x < 0 \\ x^{-2/3} - 1 = -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} & x > 0 \end{cases} \quad \to \lim_{x\to 0} g'(x) = +\infty$$

dvs. $g'(0)$ existerar ej.

- kritiska punkter: för $x < 0$ är $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} > 0 \to$ inga kritiska punkter
för $x > 0$ är $-1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \iff \sqrt[3]{x^2} = 1 \iff x^2 = 1$
$\iff x = (\pm) 1$

Dvs. $x = 1$ är den enda kritiska punkten.

| $x$ | $(-\infty)$ | | $0$ | | $1$ | | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $1$ | $+$ | $+\infty/+\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-1$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

då $\frac{\sqrt[3]{x}}{|x|} = |x|^{-2/3} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$
är $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$

Vi kom fram till
- $g$ är växande på $(-\infty, 1]$ och avtagande på $[1, \infty)$.
- $x = 0$ är ingen extrempunkt (då $g$ växer både vänster och höger)
$x = 1$ är ett lokalt (och globalt) maximum med värde $g(1) = 2$.