

① Bestäm alla asymptoter till följande funktioner:

(a) $f(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^3 - x}$

OBS: Det finns två sorter asymptoter:
lodräta och sneda (/vågräta)

(b) $g(t) = \frac{\sqrt{t^6 + 1}}{2t^2}$

(c) $h(x) = \frac{x \cdot \ln(x^2 + 1)}{\ln(2x)}$

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ då $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x \cdot (x-1) \cdot (x+1)$

OBS!: Det är kandidater (f är kont. som rationell funktion på D_f)
men inte nödvändigtvis lodräta asymptoter:

$$f(x) = \frac{2(x^3 - 1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x(x-1)(x+1)} \left[= \frac{2(x^2 + x + 1)}{x(x+1)} \text{ om } x \neq 1 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \quad \left(\text{typ } \frac{-4}{0-} \right) \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \quad \left(\frac{-4}{0+} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \left(\frac{-2}{0+} \right) \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \left(\frac{-2}{0-} \right)$$

$\Rightarrow x = -1$ och $x = 0$ är lodräta asymptoter

dock: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 + x + 1)}{x(x+1)} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$

dvs. $x = 1$ ger ingen lodrät asymptot!

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2(x^3 - 1)}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2(1 - \frac{1}{x^3}) \cdot \cancel{x^3}}{(1 - \frac{1}{x^2}) \cdot \cancel{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2$$

$y = 2$ är en vågrät asymptot (för både $x \rightarrow +\infty$ och $x \rightarrow -\infty$).

(b) $g(t) = \frac{\sqrt{t^6 + 1}}{2t^2} \rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, g är kont. för $x \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = +\infty \quad \left(\frac{1}{0+} \right) \Rightarrow x = 0 \text{ är en lodrät asymptot}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^6 + 1}}{2t^3} \stackrel{t \rightarrow \infty}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{t^6 + 1}{4t^6}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4t^6}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(g(t) - \frac{t}{2} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t^2(t^3 + \sqrt{t^6 + 1})} = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} \text{ är en sned asymptot för } x \rightarrow +\infty.$$

$$\left[g(t) - \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{t^6 + 1}}{2t^2} - \frac{t}{2} = \frac{1}{2t^2} \cdot \frac{(\sqrt{t^6 + 1} - t^3)(\sqrt{t^6 + 1} + t^3)}{\sqrt{t^6 + 1} + t^3} = \frac{t^6 + 1 - t^6}{2t^2(t^3 + \sqrt{t^6 + 1})} \right]$$

Antingen samma beräkning för $x \rightarrow -\infty$ eller insikten att g är jämn
(dvs. $g(-t) = g(t)$ för alla t) leder till att $y = -\frac{x}{2}$ är en asymptot för $x \rightarrow -\infty$
(pga. symmetrin kring y-axeln).
 $\underbrace{\hspace{10em}}$ speglingen av $y = \frac{x}{2}$ med avseende på y-axeln

$$(c) \quad h(x) = \frac{x \cdot \ln(x^2+1)}{\ln(2x)}, \quad D_h = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

för $x \rightarrow 0+$ gäller: $x \rightarrow 0$, $\ln(x^2+1) \rightarrow \ln(1) = 0$ och $\ln(2x) \rightarrow -\infty$

lim $h(x) = 0$ (" $\frac{0}{-\infty}$ ") $\rightarrow x=0$ är ingen lodrät asymptot.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x)}{x} = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(2x)} = \frac{\ln(x^2 \cdot (1+\frac{1}{x^2}))}{\ln(2)+\ln(x)} = \frac{2\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln(x) + \ln(2)} = \frac{2 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln(x)}}{1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)}}$$

$\rightarrow 0$
när $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = 2 \quad \text{och}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{\ln(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2})}{\ln(2x)} \right) = +\infty \Rightarrow \text{inga sneda asymptoter.}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{då } h(x) - 2x = \frac{x \ln(x^2+1) - 2x \ln(2x)}{\ln(2x)} = x \cdot \frac{\ln(\frac{x^2+1}{4x^2})}{\ln(2x)} \\ \text{och } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0+ \left(\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty \right) \text{ enligt Sats 7.5.2} \end{array} \right]$$

② Hur många lösningar, beroende på konstanten C , har ekvationen $Cx - \ln(x^2) = 1$?

Skriver om $C = \frac{1 + \ln(x^2)}{x} = f(x)$ och ser att $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = +\infty$ (" $\frac{-\infty}{0-}$ ") och $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$ (" $\frac{-\infty}{0+}$ ")

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ } då $\frac{\ln(x^2)}{x} = 2 \frac{\ln|x|}{x} \xrightarrow{\text{Sats 7.5.2}} 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

• $f'(x) \stackrel{\text{kvotregel}}{=} \frac{(\frac{1}{x^2} \cdot 2x) \cdot x - (1 + \ln(x^2)) \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (2 - (1 + \ln(x^2))) = \frac{1 - \ln(x^2)}{x^2}$

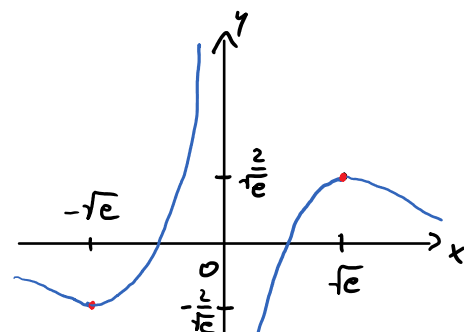
$\rightarrow f$ är deriverbar för alla $x \in D_f$ och vi får kritiska punkter där $x^2 = e \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{e}$

• Teckenschema

x	$(-\infty)$		$-\sqrt{e}$		$0-/0+$		$\sqrt{e}$		
$f'(x)$	0	-	0	+	$+\infty/+\infty$	+	0	-	0
$f(x)$	$0-$	$\searrow$	$-\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$+\infty/-\infty$	$\nearrow$	$+\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	$0+$

lok. min.

lok. max.



- För $C > \frac{2}{\sqrt{e}}$ och $C < -\frac{2}{\sqrt{e}}$ finns exakt en lösning
- För $C = \frac{2}{\sqrt{e}}$, $C = -\frac{2}{\sqrt{e}}$ och $C = 0$ finns exakt två lösningar.
- För $C \in (-\frac{2}{\sqrt{e}}, \frac{2}{\sqrt{e}}) \setminus \{0\}$ finns exakt tre lösningar.

③ Genomför en kurvkonstruktion för följande funktioner:

(i) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^{2x}}$

(ii) $g(x) = \ln(x^x)$

Arbets schema:

- (a) Definitionsmängd
- (b) Randpunkter och lodräta/sneda asymptoter
- (c) Derivatans
→ singulära/kritiska punkter
- (d) Teckenschema + extrempunkter (lokala/globala)
- (e) Rita kurvan i ett koordinatsystem med hjälp av union ovan + värdetabell.

(i) (a) $D_f = \mathbb{R}$ och det finns inga lodräta asymptoter (då f är kontinuerlig).

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (Sats 7.5.2) $\Rightarrow y=0$ är en vågrät asymptot för $x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (" $\frac{+\infty}{0+}$ ")

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{x} \cdot e^{-2x} = -\infty$ [då $\frac{(x+1)^2}{x} = x + 2 + \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ och $\frac{x}{e^{-2x}} \rightarrow +\infty$ när $x \rightarrow -\infty$]
 $\Rightarrow$ ingen sned asymptot för $x \rightarrow -\infty$.

(c) $f'(x) = \frac{2(x+1)e^{2x} - (x+1)^2 \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{2}{e^{2x}} (x+1 - x^2 - 2x - 1) = -\frac{2}{e^{2x}} x(x+1)$

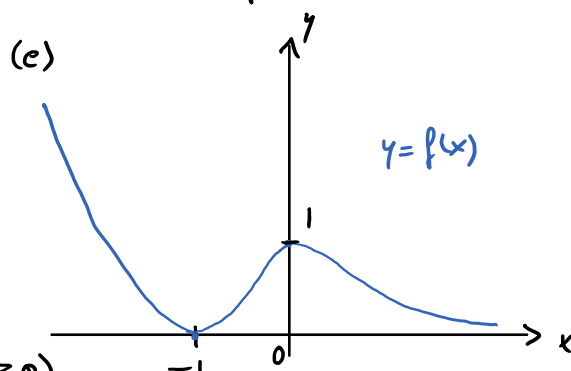
$\Rightarrow f$ är deriverbar och $x=0, x=-1$ är dess kritiska punkter.

(d) Teckenschema

x	$(-\infty)$		-1		0		(∞)
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

lok. min. lok. max.

$f(-1)=0$ är funktionens minsta värde ($f(x) \geq 0$)
ett största värde antas inte.



(ii) (a) $g(x) = \ln(x^x) \rightarrow D_g = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

[x^x är bara def. för $x > 0$ och negativa heltal och $x^x > 0$ bara för $x > 0$ och jämna neg. heltal. Sistnämnda tillför dock bara enskilda punkter, ingen kurva, och därför tar vi inte med dem.]

För $x > 0$ gäller $g(x) = x \cdot \ln(x)$.

$0 \stackrel{\text{Sats 7.5.2}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t)}{t} \stackrel{\text{skriver } x=1/t}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1/x)}{1/x} = -\lim_{x \rightarrow 0+} (x \cdot \ln(x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 0, \text{ dvs. inga lodräta asymptoter.}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ (" $\infty \cdot \infty$ ")

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = +\infty \rightarrow$ ingen sned asymptot

(c) $g'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln(x) \rightarrow g$ deriverbar på $(0, \infty)$,
dvs. inga singulära punkter, och $x = \frac{1}{e}$ är den enda kritiska punkten.

(d) Tecken schema:

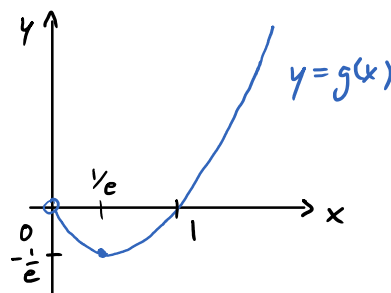
x	(0)		$\frac{1}{e}$		(∞)
$g'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

lok. min.

$g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ är minsta värdet, ett största värde antas inte.

OBS: $x=0$ är inget lokalt maximum därför att $0 \notin D_g$, dvs. $g(0)$ odefinierad.

(e)



④ Bestäm värdemängden till följande funktioner

(a) $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$

(b) $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$

(c) $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(a) $D_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (sats 7.5.2)

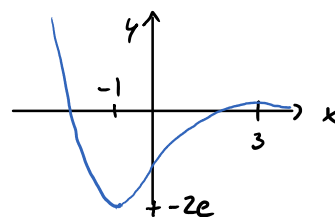
$f'(x) = (-x^2 + 3 + 2x)e^{-x} = -e^{-x}(x+1)(x-3) \Rightarrow f$ deriverbar och $x = -1, x = 3$ kritiska

Tecken schema:

x	$(-\infty)$		-1		3		(∞)
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$	$\searrow$	0

lok. min.

lok. max



Värdemängden är $V_f = [-2e, \infty)$

(b) $D_g = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (så att $x^2 - 1 \geq 0$)

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$ och $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{-x} = -1$.

$g'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot x - \sqrt{x^2 - 1} \cdot 1 \right) = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} (x^2 - (x^2 - 1)) = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$

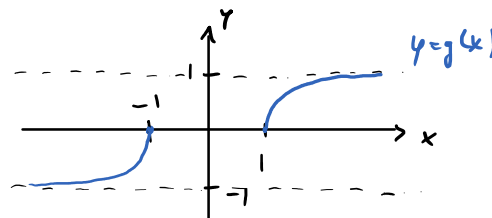
$\rightarrow g$ deriverbar för alla $x \in D_g$, varken singulära eller kritiska punkter då $x^2 \sqrt{x^2 - 1} > 0$ för alla $x \in D_g$.

Tecken schema:

x	$(-\infty)$		-1		1		(∞)
$g'(x)$	0	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	0	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	0	$\nearrow$	1	

lok. max.

lok. min.



Varken ett största eller minsta värde existerar, men enligt tabellen ovan ser vi att värdemängden ges av $V_g = (-1, 1)$.

OBS: om t.ex. inget största värde antas, måste värdemängden vara "öppen till höger", alltså av typen $[a, b)$ eller (a, b) med $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ och $b \in (a, \infty) \cup \{+\infty\}$. Samma när inget minsta värde antas "till vänster".

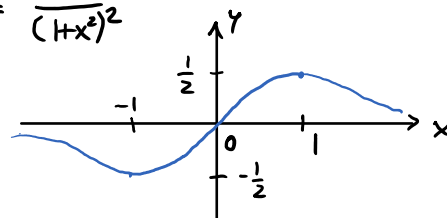
(c) $D_h = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$, $h'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

h är deriverbar och $x = \pm 1$ är dess kritiska punkter

Teckenschema:

x	$(-\infty)$		-1		1		(∞)
$h'(x)$	0	-	0	+	0	-	0
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

lok. min. lok. max.



$$\left. \begin{array}{l} h(-1) = -\frac{1}{2} \text{ är funktionens minsta värde,} \\ h(1) = \frac{1}{2} \text{ är funktionens största värde.} \end{array} \right\} V_h = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$