① Antag att funktionen f är två gånger deriverbar i $x \in \mathbb{R}$.

(a) Verifiera att andraderivatan då ges av följande gränsvärde:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

(b) Försök att få en uppfattning hur det relateras till krökningen.

(c) Beräkna med differenskvoten ovan direkt andra derivatan till $f(x)=x^3$.

(a) Enligt derivatans def. är en funktion f deriverbar i x om f är def. i en omgivning av x och gränsvärdet $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existerar.

(Då är $f'(x)=f'_+(x)=\lim_{h\searrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-(x)=\lim_{h\nearrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$).

Om f är två gånger deriverbar i x, så är f' deriverbar i x (ex. i en omgivning av x och $f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = f''_+(x)=f''_-(x)$).

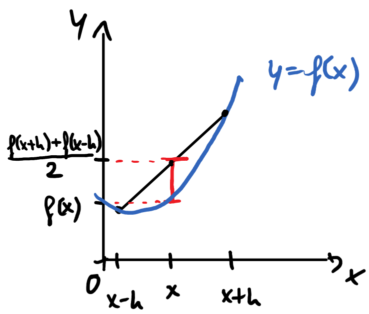
$$f''(x)=\lim_{h\searrow 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \quad \text{samt} \quad f'(x+h)=f'_-(x+h)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{f(x+h)-f(x+h-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$f'(x)=f'_-(x)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$f''(x)=\lim_{h\searrow 0}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{f(x+h)-f(x+h-\varepsilon)-f(x)+f(x-\varepsilon)}{\varepsilon\cdot h}$$

väljer $\varepsilon=h$

$$= \lim_{h\searrow 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$



(b) $\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$ är medelvärdet av $f(x-h)$ och $f(x+h)$

täljaren är alltså 2 gånger differensen mellan $f(x)$ och detta medelvärde. Detta relateras till kurvans krökning, se bilden ovan.

(c) Ex: $f(x)=x^3$ $\quad [\, f'(x)=3x^2 ,\ f''(x)=6x \,]$

$$f''(x)=\lim_{h\searrow 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \lim_{h\searrow 0}\frac{(x+h)^3-2x^3+(x-h)^3}{h^2}$$

$(x+h)^3 = x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$

$(x-h)^3 = x^3-3x^2h+3xh^2-h^3$

$$= \lim_{h\searrow 0}\frac{\cancel{2x^3}+6x\cancel{h^2}-\cancel{2x^3}}{\cancel{h^2}} = 6x.$$

② Undersök på vilka intervall följande funktioner är konvexa/konkava:

(a) $f(x) = \dfrac{2x^3-2}{x^3-x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

(b) $g(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \\ 0 & \text{för} \\ (x-1)^2-1 & \end{cases} \begin{matrix} x<-1 \\ x \in [-1,0] \\ x>0 \end{matrix}$, $D_g = \mathbb{R}$

(a) $f(x) = \dfrac{2(x^3-1)}{x(x^2-1)} = \dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+1)} \quad \left[= \dfrac{2(x^2+x+1)}{x(x+1)} \text{ för } x \neq 1 \right]$

$f'(x) = \dfrac{2(2x+1)\,x(x+1) - 2(x^2+x+1)(2x+1)}{x^2(x+1)^2} = -\dfrac{2(2x+1)}{x^2(x+1)^2}$ för $x \in D_f$

$f''(x) = -2\left[\dfrac{2\,x^{\cancel{2}}(x+1)^{\cancel{2}} - (2x+1)\left(2\cancel{x}(x+1)^{\cancel{2}} + x^{\cancel{2}}\cdot 2\cdot \cancel{(x+1)}\right)}{x^{\cancel{4}3}(x+1)^{\cancel{4}3}}\right]$

$= -2\,\dfrac{2x^2+2x-(2x+1)(2x+2+2x)}{x^3(x+1)^3} = -4\,\dfrac{x^2+x-(4x^2+4x+1)}{x^3(x+1)^3}$

$= 4\,\dfrac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}$ för $x \in D_f$

OBS.: $3x^2+3x+1 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$

$x^3 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 0$ för $x \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 0$ samt $(x+1)^3 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 0$ för $x \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} -1$

Dvs: $f''(x) > 0$ för $x<-1$ och $x>0$ $(x \neq 1)$

$f''(x) < 0$ för $-1 < x < 0$

Då $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ är f strängt konvex på $(-\infty,-1)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$ och strängt konkav på $(-1,0)$.

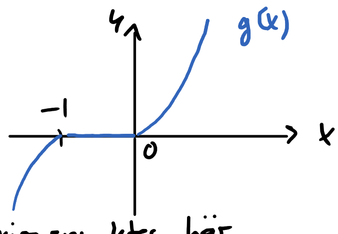
(b) $g(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \\ 0 & \text{för} \\ (x-1)^2-1 & \end{cases} \begin{matrix} x<-1 \\ x \in [-1,0] \\ x>0 \end{matrix}$, $g'(x) = \begin{cases} -2x & \\ 0 & \text{för} \\ 2(x-1) & \end{cases} \begin{matrix} x<-1 \\ x \in (-1,0) \\ x>0 \end{matrix}$

$g''(x) = \begin{cases} -2 & \\ 0 & \text{för} \\ 2 & \end{cases} \begin{matrix} x<-1 \\ x \in (-1,0) \\ x>0 \end{matrix}$

OBS: • g är kontinuerlig;
• $g'(-1)$ finns inte då $g'_-(-1) = 2 \neq g'_+(-1) = 0$
$g'(0) = 0$;
• $g''(-1)$ och $g''(0)$ ex. ej.

• g är strängt konkav på $(-\infty,-1]$
g är strängt konvex på $[0,\infty)$ då $g''(x)$ är $\begin{smallmatrix}<0\\>0\end{smallmatrix}$ där.

• g är en linje dvs. både konvex och konkav på $[-1,0]$, men varken strängt konvex eller strängt konkav där.



• g är dessutom konkav på $(-\infty,0]$ och konvex på $[-1,\infty)$.

OBS: Då funktion inte byter från strängt konvex till strängt konkav (eller tvärtom) finns det inga inflexionspunkter här.

③ Undersök följande funktioner på inflexionspunkter:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ (c) $h(x) = x \cdot |x|$

(b) $g(x) = (x-2)\, e^{|x|}$ (d) $u(x) = \sqrt[3]{x}$

<u>OBS</u>: $D_f = D_g = D_h = D_u = \mathbb{R}$

(a) $f'(x) = \dfrac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

$$f''(x) = \frac{-2x\,(1+x^2)^{\cancel{2}} - (1-x^2)\,2\cancel{(1+x^2)}\cdot 2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$(x^2-3) > 0$ för $x < -\sqrt{3}$ eller $x > \sqrt{3}$

< 0 för $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $f''(x) > 0$ för $x \in (-\sqrt{3}, 0)$ samt $x > \sqrt{3}$ (f strängt konkav)

$f''(x) < 0$ för $x < -\sqrt{3}$ samt $x \in (0, \sqrt{3})$ (f strängt konvex)

$\Rightarrow$ Då f är kontinuerlig är alltså $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ inflexionspunkter

(b) $g(x) = \begin{cases} (x-2)\cdot e^{-x} & \text{för } x < 0 \\ (x-2)\cdot e^{x} & \phantom{\text{för }} x \geq 0 \end{cases}$ $g'(x) = \begin{cases} (3-x)\, e^{-x} & \text{för } x < 0 \\ (x-1)\, e^{x} & \phantom{\text{för }} x > 0 \end{cases}$

$g''(x) = \begin{cases} (x-4)\, e^{-x} & \text{för } x < 0 \\ x\, e^{x} & \phantom{\text{för }} x > 0 \end{cases}$ OBS: $g'(0)$ finns ej då $g'_-(0) = 3 \neq g'_+(0) = -1$

strängt konkav strängt konvex

$g''(x) < 0$ för $x < 0$ och $g''(x) > 0$ för $x > 0$.

Trots att g inte är deriverbar i $x=0$ är det en inflexionspunkt då g är kontinuerlig i $x=0$ och byter från strängt konkav till strängt konvex där.

(c) $h(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{för } x < 0 \\ x^2 & \phantom{\text{för }} x \geq 0 \end{cases}$, $h'(x) = \begin{cases} -2x & \text{för } x < 0 \\ 2x & \phantom{\text{för }} x > 0 \end{cases}$, $h''(x) = \begin{cases} -2 & \text{för } x < 0 \\ 2 & \phantom{\text{för }} x > 0 \end{cases}$

<u>OBS</u>: $h'(0) = 0$, $h''(0)$ existerar ej.

$x = 0$ är ändå en inflexionspunkt då h är kontinuerlig i $x=0$, strängt konkav på $(-\infty, 0]$ och strängt konvex på $[0, \infty)$.

(d) $u(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $u'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$ för $x \neq 0$, $u''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ för $x \neq 0$.

$x = 0$ är en inflexionspunkt då u är kont. i $x=0$ samt strängt konvex på $(-\infty, 0]$ och strängt konkav på $[0, \infty)$.

④ Positionen av ett tåg ges av

$s(t) = 2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$, där tiden $t \geq 0$ mäts i minuter, distansen till $s(0) = 0$ i km.

- I vilka tidsintervall accelererar / bromsar tåget?
- När är det som snabbast och hur snabbt då?

Tågets fart ges av $v(t) = \dot{s}(t) = e^{-t}(t^2 + 2t + 2 - 2t - 2) = t^2 \cdot e^{-t}$

Dess acceleration som $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) = (2t - t^2)\cdot e^{-t}$

$a(t) > 0$ för $0 < t < 2$ och $a(t) < 0$ för $t > 2$, dvs.

tåget accelererar de första två minuterna och bromsar sedan.

$\dot{v}(t) = 0$ för $t = 0$ och $t = 2$ och $v(0) = 0$ samt $\dot{v}$ byter tecken från + till − i $t = 2$ $\Rightarrow$ $v(2) = \frac{4}{e^2} \approx 32.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ är den maximala farten.

⑤ Genomför en kurvkonstruktion med hjälp av andraderivata för funktionen $f(x) = \frac{x^3+1}{(x+2)\cdot|x|}$.

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ samt $\lim_{x\searrow -2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\nearrow -2} f(x) = \infty$

  $\Rightarrow x = 0$ och $x = -2$ är lodräta asymptoter

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{(x+2)\cdot x\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{(x+2)(-x)\cdot x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+1/x^3}{-1-2/x} = -1$$

  $$\lim_{x\to\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}+1-x(\cancel{x^2}+2x)}{(x+2)\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = -2$$

  $$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3}+1+x(-\cancel{x^2}-2x)}{(x+2)\cdot(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2+\frac{1}{x^2}}{-1-\frac{2}{x}} = 2$$

  Dvs. $y = x-2$ är en sned asymptot för $x \to +\infty$

  och $y = -x+2$ — " — $x \to -\infty$

- $$f'(x) = \frac{x^4+4x^3-2x-2}{x^2(x+2)^2} \text{ för } x>0 \text{ och } -\frac{x^4+4x^3-2x-2}{x^2(x+2)^2} \text{ för } x<0$$

  $$f''(x) = \frac{2(4x^3+3x^2+6x+4)}{x^3(x+2)^3} \text{ för } x>0 \text{ och } -\frac{2(4x^3+3x^2+6x+4)}{x^3(x+2)^3} \text{ för } x<0$$

$x_1 = 0.92078$ och $x_2 = -3.9023$ är nollställen till f'

$x_3 = -0.68659$ är nollstället till f''

$f' < 0$ för $x < x_2$ och $x \in (0, x_1)$

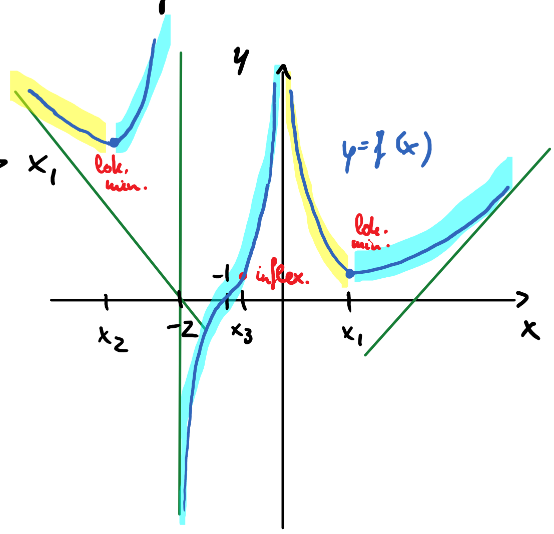
$f' > 0$ för $x \in (x_2, 0)\setminus\{-2\}$ och $x > x_1$

str. konvex

$f'' > 0$ för $x \in (-\infty, -2), (x_3, 0), (0, \infty)$

str. konkav

$f'' < 0$ för $x \in (-2, x_3)$



OBS: Mycket krångligt här med termerna/nollställen; kommer definitivt inte kräva lika mycket "beräkningskunskap" på tentan!