



Övningstentamen

i kursen

Matematik TB, del C

Hjälpmedel: Allt i form av beräkningshjälp, anteckningar eller litteratur är tillåtet. Det är dock inte tillåtet att kommunicera muntligt/skriftligt med någon annan person (utöver tentavakt/examinator) eller att göra information tillgänglig till andra på något sätt.

Ansvarig lärare: Timo Vilkas

OBS! Markera tydligt på varje inlämnat blad, vilken uppgift det gäller. Använd inte samma sida till flera uppgifter (olika deluppgifter på samma sida går bra). Ange svar tydligt, förenkla svaret så långt som möjligt och motivera dina svar väl. Var noga med att förklara vad du gör, hur och varför. Det är i hög grad lösningen som ger poäng, inte själva svaret. Även ofullständig eller bristfällig lösning kan ge poäng, så försök även om du är osäker. Tänk också på att inte fastna för länge i någon uppgift!

Formeln för hur skrivningspoäng beräknas utifrån tentamenspoäng och eventuell bonus står på kurshemsidan. Utan bonus behövs 20 poäng för betyget 3 (godkänt), 28 för 4 och 35 för 5.

Uppgift 1. Låt funktionen f vara styckvis definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & x < 0, \\ \sin(x) & \text{för } 0 \leq x \leq \pi, \\ -x & x > \pi. \end{cases}$$

- (a) För vilka $x \in \mathbb{R}$ är den deriverbar? Ange intervall där funktionen är växande respektive avtagande. (3p)
- (b) Bestäm alla lokala extrempunkter och funktionens största och minsta värde, ifall dessa existerar. (2p)
- (c) Var är funktionen två gånger deriverbar? Beräkna andraderivatan för dessa x . (2p)
- (d) På vilka intervall är funktionen strängt konvex respektive strängt konkav? (2p)

Uppgift 2. Bestäm alla asymptoter till följande funktioner:

(a) $h(x) = \frac{\ln(x) + x^2}{(x-2)^2}$ (2p)

(b) $r(x) = (x+1) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ (2p)

Uppgift 3. Betrakta $g(x) = \frac{1}{x+1} \cdot e^x$ och genomför en kurvkonstruktion för $y = g(x)$:

- (a) Bestäm både definitionsmängden D_g och eventuella lodräta asymptoter till kurvan samt undersök beteendet vid randpunkterna (inkl. $x \rightarrow \pm\infty$). Motivera väl! (2p)
- (b) Undersök om kurvan har vågräta/sneda asymptoter och bestäm dem i så fall. (2p)
- (c) Hitta alla singulära/kritiska punkter och gör ett teckenschema för derivatan. (3p)
- (d) Bestäm alla lokala extrempunkter, värdemängden och rita kurvan på ett sätt så att all information du samlade framgår ur skissen. (3p)

Uppgift 4. En rätvinklig triangel har två kateter a och b samt en hypotenusa c . Vilken uppsättning a, b, c ska väljas för att få triangeln med störst area bland alla rätvinkliga trianglar med omkrets 2 (längdenheter)? Beräkna den maximala arean. Ur din härledning ska det framgå varför den är maximal. (4p)

Uppgift 5. Ekvationen $y^2 - 2xy + x^3 = 1$ beskriver (implicit) en plan kurva. Bestäm normalen för alla skärningspunkter av kurvan med linjen $x = 1$. (3p)

Uppgift 6. Betrakta kurvan $y = \arctan(x^2)$.

- (a) Bestäm tangenten till kurvan i punkten med x -koordinaten 1 samt punkten där denna tangent skär x -axeln. (2p)
- (b) Hitta funktionens inflexionspunkter. (2p)
- (c) Bestäm alla ytterligare tangenter till kurvan som går genom skärpunkten i (a). (2p)

Uppgift 7. En snigel befinner sig på hörnet av en sandig rabatt i form av en kvadrat med sidlängd 2 m. Precis i hörnet mittemot står det en saftig blomma som den vill nå så snabbt som möjligt. Utanför rabatten är det blött gräs där snigeln kan krypa med 2 m i timmen, i rabatten däremot bara med 1 m i timmen. När når snigeln blomman, om den kryper längs vägen som minimerar tiden? (4p)

Lycka till!