

Lösningssförslag till övnings-tentan

Uppgift 1

- (a) uppenbarligen är $D_f = \mathbb{R}$ och alla grenar deriverbara (rationell fkt., trig. fkt., polynom). Observera att f är okontinuerlig i $x = \pi$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \\ \cos(x) & \text{för } 0 < x < \pi \\ -1 & \pi < x \end{cases}$$

I sammansättningspunkterna:

$$f'_-(0) = 1 = f'_+(0) = f'(0), \quad f \text{ okontinuerlig i } x = \pi$$

$\Rightarrow f$ deriverbar i $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\}$.

- Tecknet på derivatan ger att

f är avtagande på $(-\infty, -1], [\frac{\pi}{2}, \pi], (\pi, \infty)$

och växande på $[-1, 0], [0, \frac{\pi}{2}]$

Då funktionen är kont. i $x=0$ och hoppar neråt i $x=\pi$ är den dessutom växande på $[-1, \frac{\pi}{2}]$ och avtagande på $[\frac{\pi}{2}, \infty)$.

- (b) Med hjälp av (a) har vi hittat två kritiska punkter ($x = -1, x = \frac{\pi}{2}$) och en singulär punkt ($x = \pi$).

Tecknet av derivatan ger att $(x, y) = (-1, -\frac{1}{2})$ är ett lok. min.

och $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ är ett lok. max.

Då f är avtagande i en hel omgivning av $x = \pi$ är det ingen extrempunkt.

Då $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ är

i funktionens största värde och ett minsta värde finns ej.

- (c) Precis som ovan följer att f är två gånger deriverbar för $x \notin \{0, \pi\}$.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} & x < 0 \\ -\sin(x) & x \in (0, \pi) \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

Då f varken är kont. eller deriverbar i $x = \pi$ och $f''_-(0) = 0 = f''_+(0) = f''(0)$ är funktionen två gånger deriverbar i $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\}$

- (d) Enligt sats 8.2.1 är f strängt konkav på $(-\infty, -\sqrt{3})$ samt $(0, \pi)$ [andradderivatan är < 0 där] och strängt konvex på $(-\sqrt{3}, 0)$.

På (π, ∞) är den en linje $\rightarrow$ varken strängt konvex eller strängt konkav.

Uppgift 2 (a) $D_h = \{x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq 2\}$, h kontinuerlig på D_h .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty \quad \left(\frac{-\infty}{4} \right) \rightarrow x=0 \text{ lodrät asymptot}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = +\infty \quad \left(\frac{\ln(2)+4}{0^+} \right) \rightarrow x=2 \text{ lodrät asymptot.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\frac{\ln(x)}{(x-2)^2}}_{\rightarrow 0 \text{ sats 7.5.2}} + \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}}_{\rightarrow 1} \right] = 1$$

$\Rightarrow y=1$ är en vågrät asymptot för $x \rightarrow \infty$.

(b) $D_r = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} r(x) = +\infty \quad \left[1 - \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \text{ för } x \rightarrow 0^- \right] \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} r(x) = 0 \quad \left[\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \text{ är högerkont. i } x=1 \right] \end{array} \right\} x=0 \text{ lodrät asymptot}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}_{\rightarrow 1} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (r(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right) + \underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}_{\rightarrow 1} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \right) + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{då } \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 1 = \frac{1 - \frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \quad (\text{förlängning med konjugat})$$

Den sneda asymptoten för $x \rightarrow \pm\infty$ är då $y = x + \frac{1}{2}$.

Uppgift 3

$$g(x) = \frac{1}{x+1} e^x$$

$$(a) D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty \quad \left(\frac{e^{-1}}{0^-} \right), \quad \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \infty \quad \left(\frac{e^{-1}}{0^+} \right)$$

$x = -1$ lodrät asymptot.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \quad (\text{då } \frac{1}{x+1} \text{ och } e^x \rightarrow 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty \quad (\text{då } \frac{1}{g(x)} = \frac{x+1}{e^x} \rightarrow 0^+, \text{ sats 7.5.2})$$

(b) Vet från del (a) att $y=0$ är en vågrät asymptot för $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x(x+1)} = +\infty \quad (\text{då } \frac{x(x+1)}{e^x} \rightarrow 0^+ \text{ när } x \rightarrow \infty, \text{ sats 7.5.2})$$

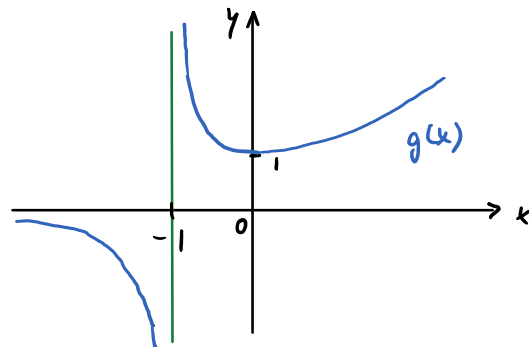
$\Rightarrow$ ingen asymptot för $x \rightarrow \infty$.

(c) g är deriverbar i alla $x \in D_g$ (kvotregel) $\rightarrow$ inga singulära punkter

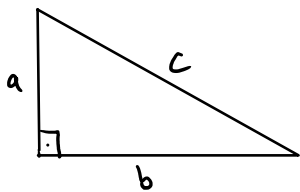
$$g'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} e^x \rightarrow x=0 \text{ enda kritisk punkt}$$

x	$(-\infty)$		-1		0		(∞)
$g'(x)$	0	$-$	$-\infty/-\infty$	$-$	0	$+$	∞

(d) $(x, y) = (0, 1)$ är ett lok. minimum enligt tecken-skemat, inga andra lok. extrempunkter. Värde-mängden är $V_g = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.



uppgift 4



Pythagoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Omkräts: $a + b + c = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ (ska vara lika med 2)

Area: $\frac{1}{2}ab$ (en halv bas gånger höjd).

Med $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 - (a + b)$ följer

$$a^2 + b^2 = 4 - 4(a + b) + a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow 4b - 2ab = 4(1 - a)$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{2(1 - a)}{2 - a}$$

Observera att $a, b \in [0, 1]$ för att få en triangel (då $c \geq \max\{a, b\}$ och $a + b + c = 2$)!

$A = \frac{1}{2}ab = \frac{a(1 - a)}{2 - a}$. Deriveras man med avseende på a får

$$A'(a) = \frac{(1 - 2a)(2 - a) + a(1 - a)}{(2 - a)^2} = \frac{a^2 - 4a + 2}{(2 - a)^2}$$

och $A'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \pm \sqrt{2}$.

Da bara $2 - \sqrt{2}$ ligger i $[0, 1]$ och $A'(a) \geq 0$ för $a > 2 - \sqrt{2}$ på $[0, 1]$ följer det att triangeln med störst area bland rätvinkliga trianglar med omkräts 2 är den med $a = 2 - \sqrt{2}$ le, $b = 2 - \sqrt{2}$ le och $c = 2(\sqrt{2} - 1)$ le, alltså den liksidiga varianten.

Den har area $A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17$ ae.

Uppgift 5

Sätter man i $x = 1$ följer $1 = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$

vilket har $y = 0$ och $y = 2$ som lösning. Vi letar alltså efter normalen till kurvan i $(1, 0)$ och $(1, 2)$.

Implicit derivering m.a.p. variabeln x ger (kedje- och produkt regel!)

$$2yy' - 2y - 2xy' + 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{2y - 3x^2}{2(y - x)}$$

I punkten $(1, 0)$ är kurvans lutning $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

— $(1, 2)$ — " — $\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 3}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

Da normalen har riktningskoefficient $-\frac{1}{y'}$, fås:

Normalen i $(1, 0)$: $y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}(x - 1)$

— " — $(1, 2)$: $y - 2 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 4$

Uppgift 6

$$f(x) = \arctan(x^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (2x) = \frac{2x}{1+x^4}$$

$$(a) \left. \begin{aligned} f(1) &= \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \\ f'(1) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ tangent: } y - \frac{\pi}{4} = (x-1) \Leftrightarrow y = x + \frac{\pi}{4} - 1$$

Skär x-axeln i $x = 1 - \frac{\pi}{4}$.

(b) f är kont. och två gånger deriverbar (för alla $x \in \mathbb{R}$, då $\arctan$ och x^2 är det).

$$f''(x) = \frac{2(1+x^4) - 2x(4x^3)}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) \geq 0 \text{ för } 2-6x^4 \geq 0 \text{ (då } 1+x^4 > 0) \\ \Leftrightarrow x^4 \leq \frac{1}{3}$$

Detta ger $f''(x) < 0$ för $x < -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ och $x > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ samt
 $f''(x) > 0$ för $x \in (-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$.

Med sats 8.2.2 är alltså $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ och $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ funktionens inflexionspunkter.

(c) OBS: Den här deluppgiften blir för svår efter att jag ändrade kurvan. Den skulle vara istället:

Hur många tangenter till kurvan går genom skärningspunkten i (a)?
 (och är då fortfarande på översbetygsnivå)

Lösning: Tangenten i $x=a$ ges av $y = \frac{2a}{1+a^4}x - \frac{2a^2}{1+a^4} + \arctan(a^2)$.

- För $a=0$ är det x-axeln, som naturligtvis går genom punkten $(1-\frac{\pi}{4}, 0)$.
- För $a \neq 0$ är den inte vågrät och skär x-axeln i punkten med x-koordinat

$$k(a) = a - \frac{1+a^4}{2a} \cdot \arctan(a^2).$$

$$k'(a) = \frac{(1-3a^4) \cdot \arctan(a^2)}{2a^2}$$

Anm.: Som bekant $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x \cdot \cos(x)} = 1$
 $x = \arctan(u) \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\arctan(u)} = 1 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan(u)}{u} = 1$.

Har man ritat kurvan $y = \arctan(x^2)$ (eller $\nearrow$) ser man att $\lim_{a \rightarrow 0} k(a) = 0$.

Sedan är $k'(a) = 0$ för $a = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ($k'(0)$ ex. och är lika med $\frac{1}{2}$)

samt $k'(a) < 0$ för $a < -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ och $a > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$,
 $k'(a) > 0$ för $a \in (-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}) \setminus \{0\}$.

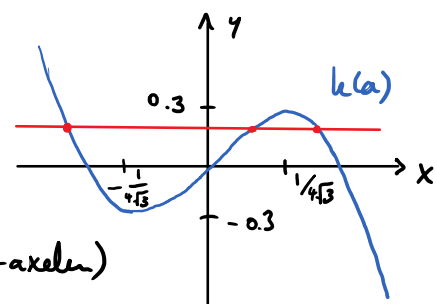
Detta ger lok. min. i $(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -0.3004\dots)$ och lok. max i $(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 0.3004\dots)$

Då $\lim_{a \rightarrow -\infty} k(a) = +\infty$, $\lim_{a \rightarrow \infty} k(a) = -\infty$

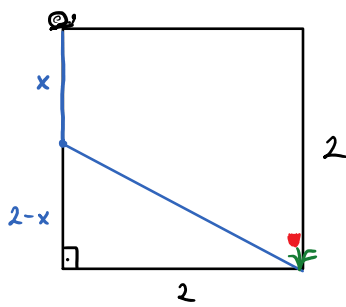
och $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215\dots < 0.3$ hittar vi totalt

4 lösningar till $k(a) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

(3 ur diskussionen ovan samt $a=0$ som inte ger entydig skärningspunkt utan hela x-axeln.)



Uppgift 8



Uppenbarligen är det raka vägar som minimerar tiden. Snigeln är snabbare längs rabatten, kryper dock en omväg då. Om den först håller sig x m utanför rabatten och sedan kör rakt genom sanden blir tiden totalt:

$$T(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{2^2 + (2-x)^2} = \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}, \text{ i timmar}$$

där $x \in [0, 2]$.

Går den inte alls genom sanden blir tiden $T(2) = \frac{4 \text{ m}}{2 \text{ m/h}} = 2 \text{ h}$.

$$T'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}, \quad x \in [0, 2].$$

$$\begin{aligned} \text{dvs. } T'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(2-x) = \sqrt{x^2-4x+8} \quad \begin{matrix} 2-x > 0 \\ \Leftrightarrow 4(x^2-4x+4) = x^2-4x+8 \\ \Leftrightarrow 3x^2-12x+8 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{matrix} \end{aligned}$$

Bara $x = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ är relevant (då mellan 0 och 2), och med avseende på $T(0) = \sqrt{8}$ samt $\lim_{x \rightarrow 2^-} T(x) = 3$ måste den kritiska punkten $T(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}) = 1 + \sqrt{3} \approx 2.732$ därmed vara ett lok. minimum.

Då $T(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}) > 2$ är det dock bäst för snigeln att underlupa sanden helt!

Ritar man $T(x)$ på hela $[0, 2]$ ser det ut såhär:

