Föreläsning 1: Review of algebra

Viktiga identiteter:

Kvadreringsreglerna: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .... (R_1)

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .... (R_2)

Konjugatregeln: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ .... (R_3)

Kuberingsreglerna: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ..... (R_4)

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ..... (R_5)

Faktoruppdelningar: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ ..... (R_6)

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ..... (R_7)

Vi använder reglerna för att utveckla och förenkla algebraiska uttryck.

Exempel 1: Faktorisera $12x^4 - 2x^5 - 18x^3$.

Lösning: $12x^4 - 2x^5 - 18x^3 = 2x^3(6x - x^2 - 9)$ / Bryt ut så mycket som möjligt

$= -2x^3(x^2 - 6x + 9)$ / obs. minus tecken

$= -2x^3(x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 3^2)$ / obs. (R_2)

$= -2x^3(x-3)^2$

Obs.

$$12x^4 - 2x^5 - 18x^3 \underset{\xleftarrow[\text{utveckling}]{}}{\xrightarrow{\text{faktorisering}}} -2x^3(x-3)^2$$

Beroende på uppgiften, kommer vi att faktorisera eller utveckla.

Ni måste kunna kvadratkomplettering (s.4) och pq-formel (s.5).

Olikheter:

En olikhet kan betraktas som en ekvation där likhetstecknet är utbytt mot ett olikhetstecken.

Då man multiplicerar eller dividerar en olikhet med ett negativt tal så vänds olikhetstecknet.

Exempel 2: Lös olikheten $-3x+5 \leq 8$.

Lösning: $-3x+5 \leq 8 \iff -3x \leq 8-5$

$\iff -3x \leq 3$

$\iff x \geq -1$ (Vi skriver också $x \in [-1, \infty)$.)

Exempel 3: Lös olikheten $x^2+2x \geq 0$.

Lösning: $x^2+2x \geq 0 \iff x(x+2) \geq 0$ | faktorisering

Nu använder vi teckentabell:

	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$

Absolut belopp:

Definition 1: Absolutbelopp, $|x|$, av $x \in \mathbb{R}$ definieras som

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}.$$

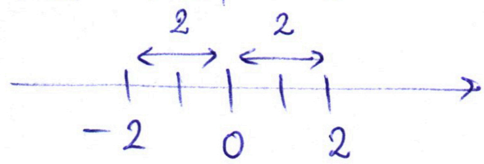
Exempel 4: $|5| = 5$, $|-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$, $|0| = 0$

$\downarrow$

$|-\frac{1}{2}| = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

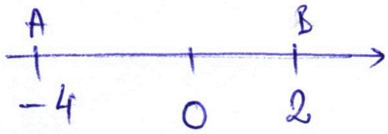
Vi introducerar ett sådant begrepp så att vi kan prata om avstånd (på ett matematiskt sätt).

Exempel 5: $|2| = |-2| = 2$ - avståndet mellan 2 och 0 (eller mellan -2 och 0)

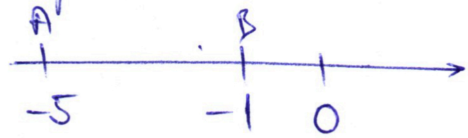


Exempel 6: Beräkna avståndet mellan punkterna A och B

a)



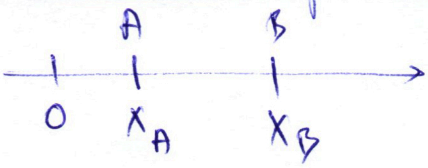
b)



Lösning: a) $AB = |2-(-4)| = |2+4| = |6| = 6$

b) $AB = |-1-(-5)| = |-1+5| = |4| = 4$

Avståndet mellan punkterna A och B

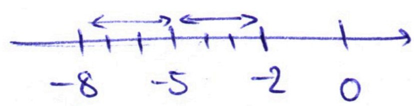


$$|AB| = |x_B - x_A|$$

Exempel 7: Finn alla tal x sådana att avståndet från x till -5 är lika med 3.

Lösning: $|x-(-5)| = 3 \iff |x+5| = 3 \iff \left\{ \begin{array}{c} x+5=3 \\ \text{eller} \\ x+5=-3 \end{array} \right.$

$\iff \left\{ \begin{array}{c} x=-2 \\ \text{eller} \\ x=-8 \end{array} \right.$



Likhet med absolutbelopp: $|x| = a \iff x = a$ eller $x = -a$

$(a > 0)$!

Olikhet med absolutbelopp: $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

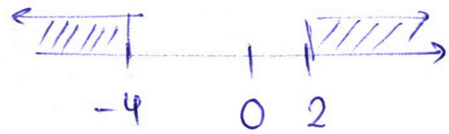
$|x| \geq a \iff x \leq -a$ eller $x \geq a$

Exempel 8:

a) $|x| = -6$ $\rightarrow$ olösbar! $(-6<0)$

b) $5|x+1| > 15 \iff |x+1| > 3 \iff \begin{cases} x+1 > 3 \\ \text{eller} \\ x+1 < -3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x > 2 \\ \text{eller} \\ x < -4 \end{cases}$



$x \in (-\infty, 4) \cup (2, \infty)$

Kvadratrötter:

Definition 2: Låt $a \geq 0$. Med kvadratroten ur a, $\sqrt{a} = a^{1/2}$, menas det icke-negativa reella tal, vars kvadrat är a.

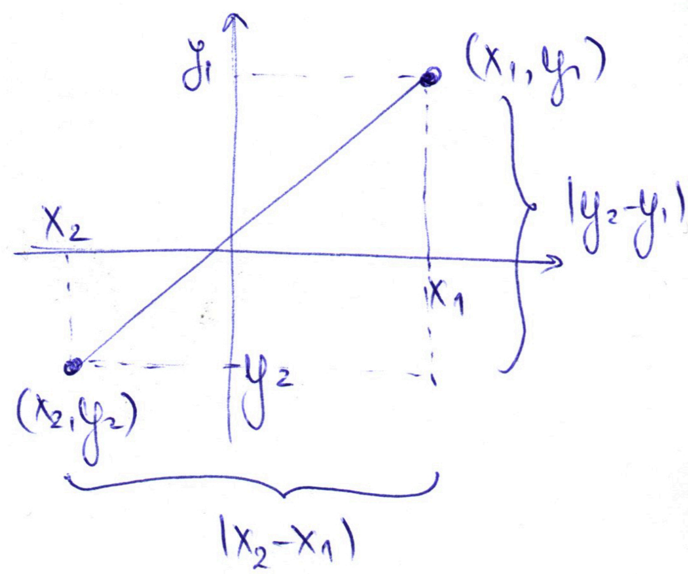
Exempel 9: $\sqrt{4} = 2$ inte -2 eller ± 2
(Däremot har ekvationen $x^2 = 4$ lösningar $x = \pm 2$.)

Exempel 10: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$

Då har vi att $\sqrt{a^2} = |a|$, för alla $a \in \mathbb{R}$.

Review of analytic geometry

Om $A(x_1, y_1)$ och $B(x_2, y_2)$ är två punkter i planet ges avståndet mellan dem av Pythagoras sats:



$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exempel: Avståndet mellan punkterna $A(\frac{3}{4}, 1)$ och $B(-\frac{7}{4}, -1)$

är: $d = \sqrt{(-\frac{7}{4} - \frac{3}{4})^2 + (-1, -1)^2} = \sqrt{(-\frac{5}{2})^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 4}$
$= \sqrt{\frac{25+16}{4}} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$

Definition: Grafen till en ekvation är mängden av alla punkter vars koordinater uppfyller ekvationen.

Exempel: Rita grafen till $x^2 + y^2 = 4$.

Lösning: Låt $M(x, y)$ så att $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 2^2$
$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{2^2} = 2 \Rightarrow$ avståndet mellan origo och M är lika med 2 $\Rightarrow$ grafen av cirkeln centrerad på origo med radie 2.

Definition: Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $r > 0$ vara konstanter.

a) En cirkel är grafen till en ekvation av formen
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

b) En cirkelskiva är grafen till en ekvation av formen
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \quad \text{eller} \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2.$$

(a, b) kallas cirkelns/cirkelskivans centrum, och r dess radie.

Definition: En rät linje är grafen till en ekvation av formen $y = kx + m$, där $k, m \in \mathbb{R}$ är konstanter.

- k kallas för linjens lutning (eng: slope) och kan beräknas enligt $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ där (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är två punkter på linjen.

- m beskriver y-koordinaten för den punkt där linjen skär y-axeln (eng: y-intercept).

- För två räta linjer $y = k_1 x + m_1$ och $y = k_2 x + m_2$ gäller att:

  (i) $k_1 = k_2 \Leftrightarrow$ linjerna är parallella

  (ii) $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow$ linjerna är vinkelräta (eng: perpendicular)

Exempel: Bestäm en ekvation till linjen som går genom $A(1,2)$ och $B(-1,3)$.

Lösning: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{-1-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + m$

$\Rightarrow m = y + \frac{1}{2}x$

Punkt A (eller B) tillhör linjen $\Rightarrow m = 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Exempel: Bestäm en ekvation till linjen som är vinkelrät till linjen $y = 2x + 3$ och går genom $A(2,1)$.

Lösning: $k_1 = 2$, $m_1 = 3$

vinkelrät $\Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + m_2$

A tillhör linjen $\Rightarrow m_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$