

MVE535 Föreläsning 2

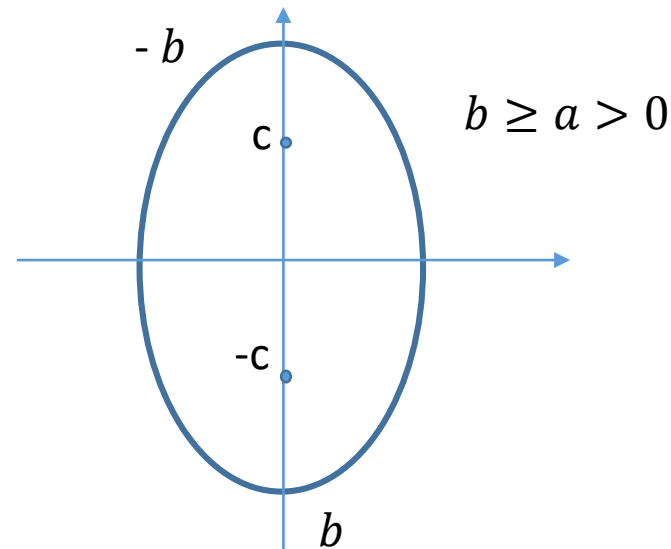
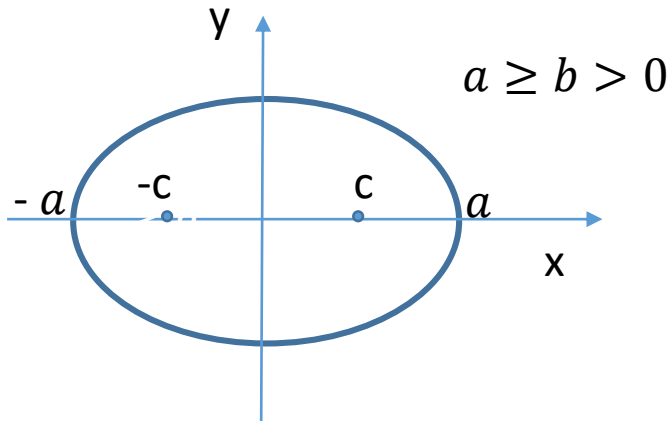
Ellipser. Funktioner

Ellipser

Definition 1: En ellips är grafen till ekvation av formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0.$$

- Om $a \geq b > 0$, kallas punkterna $(\pm a, 0)$ **transversala punkter** och $(\pm c, 0)$ **brännpunkter**, $c^2 = a^2 - b^2$.
- Om $b \geq a > 0$, kallas punkterna $(0, \pm b)$ **transversala punkter** och $(0, \pm c)$ **brännpunkter**, $c^2 = b^2 - a^2$.
- Om M är en punkt på ellipsen och C och D är brännpunkterna, så gäller att CM+DM är konstant för alla M.



Exempel 1: Bästäm transversala och brännpunkter av följande ellipser:

$$(a) x^2 + 3y^2 = 1, \quad (b) 2x^2 + 3y^2 = 2, \quad (c) \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Lösning:

$$a) x^2 + 3y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1$$

$$\Rightarrow a=1, b=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$a > b \Rightarrow$ transversala punkter är $(\pm 1, 0)$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{brännpunkter } (\pm \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$$

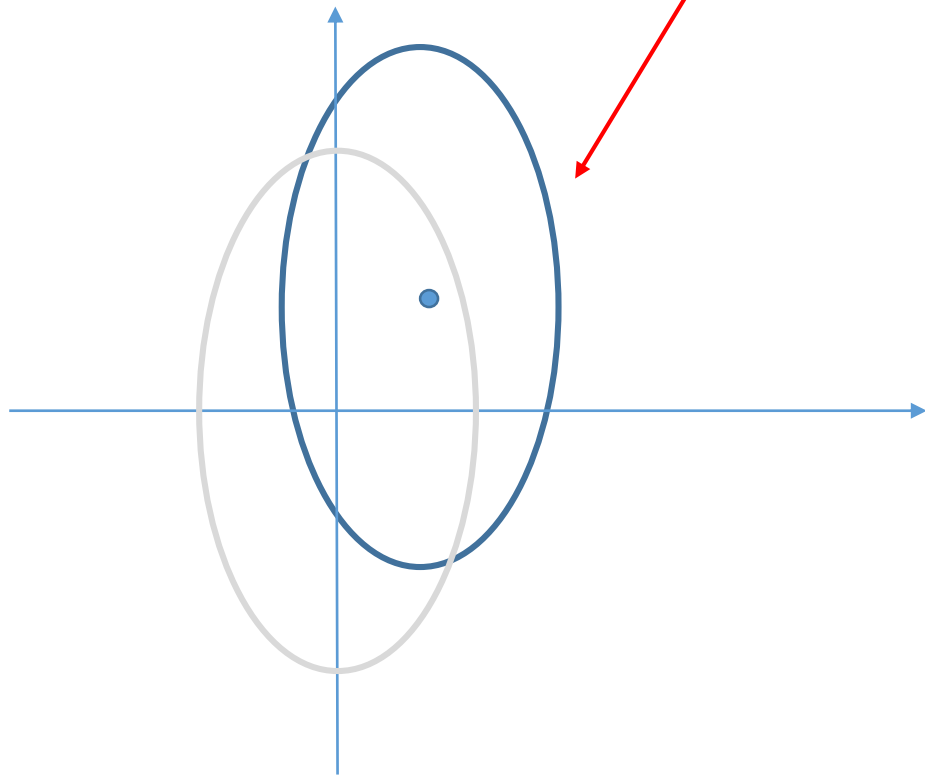
$$(b) 4x^2 + 3y^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2} = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ och } a < b$$

$\Rightarrow$ transversala punkter $(0, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$

$$\Rightarrow \text{brännpunkter } (0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}), c^2 = b^2 - a^2 = \frac{1}{6}$$

(c) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \rightarrow$ ellipsen är centrerad i punkt (1,2)
inte på origo



$$a=2, b=3, c=\sqrt{5}$$

Brännpunkter **är inte** $(0, \pm\sqrt{5})$ eftersom ellipsen är inte centrerad på origo. De är $(1, 2 \pm \sqrt{5})$.

Transversala punkter **är inte** $(0,3)$ men $(1, 2 \pm 3)$.

Funktioner

Definition 1: En funktion f är en regel som mot varje element a i en mängd A ordnar ett och endast ett element b i en mängd B . Vi säger att f är en funktion från A till B och skriver $f:A \rightarrow B$.

- A kallas för definitions­mängd (eng: domain) och betecknas D_f .
- Alla värden som f kan anta kallas för f 's värdemängd (eng: range) och betecknas V_f .
- Vi kommer endast att studera reellvärda funktioner dvs. D_f och V_f är $\mathbb{R}$ eller delmäng av $\mathbb{R}$.

Exempel 1: Bestäm D_f av följande funktioner:

$$(a) f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad (b) f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 6x + 9}$$

Lösning:

$$(a) x^2 \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) = D_f$$

$$(b) x^2 - 6x + 9 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

Obs! Tecken $\setminus$ menar utom.

Exempel 2: Bestäm D_f och V_f av följande funktioner:

$$(a) f(x) = x+1, \quad (b) g(x) = \sqrt{x}, \quad (c) h(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$
$$(d) k(x) = \sin x, \quad (e) l(x) = 2^x$$

Lösning:

$$(a) D_f = \mathbb{R}, V_f = \mathbb{R}$$

$$(b) D_g = [0, \infty), V_g = [0, \infty)$$

$$(c) D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1$$

$$\Rightarrow V_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$(d) D_k = \mathbb{R}, V_k = [-1, 1]$$

$$(e) D_l = \mathbb{R}, V_l = (0, \infty)$$

Obs! Funktioner $h_1 = \frac{x^2-1}{x-1}$ och $h_2 = x+1$ är **inte** lika med varandra eftersom $D_{h_1} \neq D_{h_2}$.

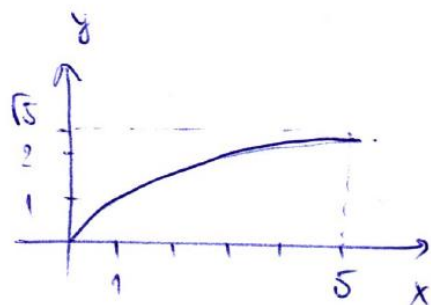
Definition: Två funktioner f och g är lika med varandra om och endast om

1. $D_f = D_g$ och
2. $f(x) = g(x)$ för alla $x \in D_f$

Definition 2: Grafen till en funktion f är alla punkter (x, y) som uppfyller $y = f(x)$ för alla $x \in D_f$.

Exempel 3: Rita grafen till $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 5]$.

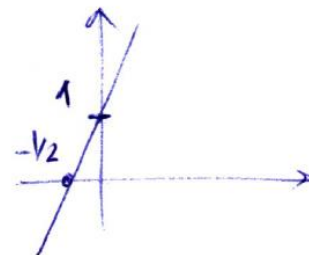
Lösning: $D_f = [0, 5]$, $V_f = [0, \sqrt{5}]$



Exempel 4: Rita grafen till $f(x) = 2x + 1$.

Lösning: Föreläsning 1, grafen till räta linje $y=kx+m$.

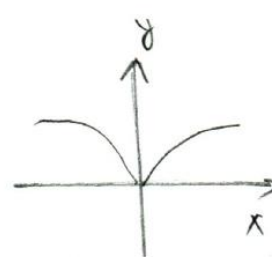
$$y = 2x + 1$$
$$k = 2$$
$$m = 1$$



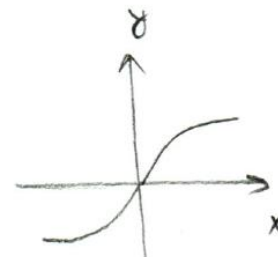
Definition 3: En funktion f kallas

- a) Jämn om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$
- b) Udda om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in D_f$

Obs! Innan vi kan undersöka om f är jämn/udda måste vi kontrollera om $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ stämmer för alla x .



jämn
(symmetrisk)

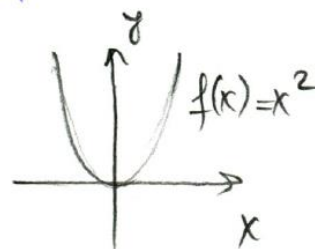


udda
(speling)

Exempel 5: Avgöra om f är jämn eller udda funktion.

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$ (c) $f(x) = x+1$

Lösning: (a) $D_f = \mathbb{R} \Rightarrow (x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow$ jämn

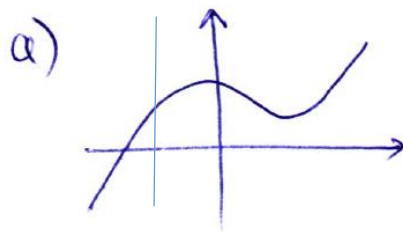


(b) $D_f = [0, \infty)$, $x \in D_f \not\Rightarrow -x \in D_f$ så f kan inte vara jämn/udda

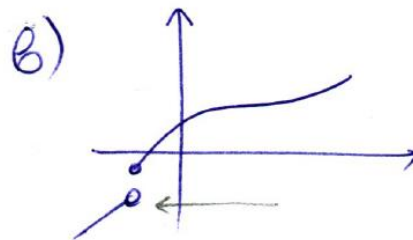
(c) $D_f = \mathbb{R}$, $f(-x) = -x+1$
 $-f(x) = -(x+1) = -x-1$ $\Rightarrow f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow f$ är inte jämn/udda

Vertikal linje test

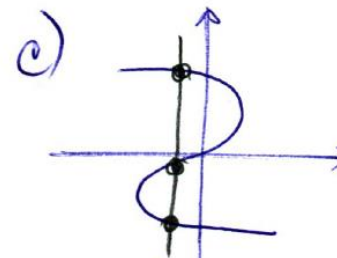
För att bestämma om en graf är graf till en funktion kan man använda test: om varje vertikal linje skär grafen i högst ett punkt, så är den graf till en funktion.



Funktion



Funktion eftersom den sista punkten inte tillhör nedre del av grafen men tillhör den övre delen



Ej funktion

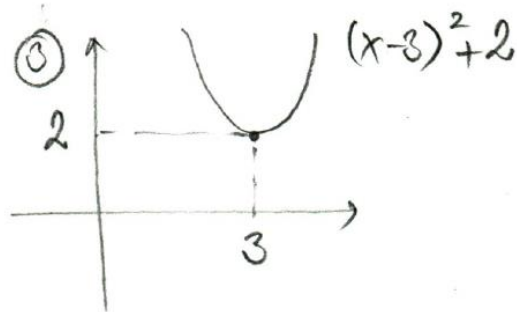
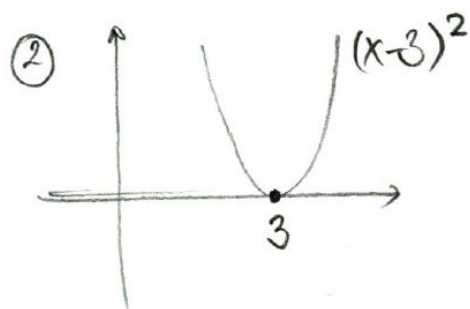
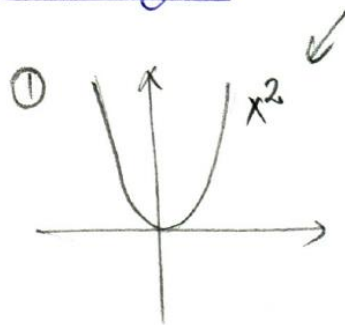
Nya funktioner ur gamla

Låt f vara en funktion ock $c > 0$. För att få grafen till

1. $f(x)+c$, flytta grafen till $f(x)$ c steg uppåt
2. $f(x)-c$, flytta grafen till $f(x)$ c steg nedåt
3. $f(x-c)$, flytta grafen till $f(x)$ c steg till höger
4. $f(x+c)$, flytta grafen till $f(x)$ c steg till vänster

Exempel 7: Rita grafen till $f(x) = (x-3)^2 + 2$.

Lösning: Rita grafen till $f(x) = x^2$

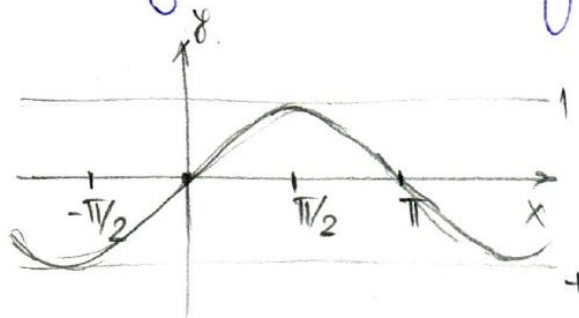


Låt f vara en funktion ock $c > 1$. För att få grafen till

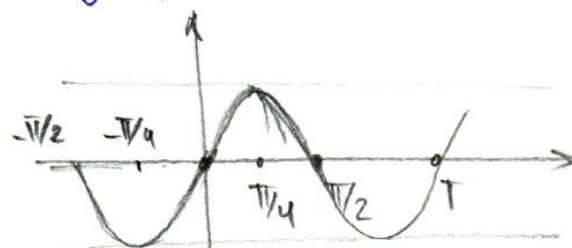
1. $cf(x)$, sträcka grafen till $f(x)$ vertikalt med faktor c
2. $f(x)/c$, krympa grafen till $f(x)$ vertikalt med faktor c
3. $f(cx)$, krympa grafen till $f(x)$ horisontalt med faktor c
4. $f(x/c)$, sträcka grafen till $f(x)$ horisontalt med faktor c
5. $-f(x)$, reflektera grafen till $f(x)$ kring x -axeln
6. $f(-x)$, reflektera grafen till $f(x)$ kring y -axeln

Exempel 8: Rita grafen till $f(x) = \sin 2x$.

Lösning: Vi kan börja med grafen till $\sin x$:



$$\sin 0 = \sin \pi = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$



$$\sin 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

Kombinationer av två funktioner

Givet två funktioner f och g , hur kan vi kombinera dessa?

$$(i) f+g \quad (ii) f-g \quad (iii) f \cdot g \quad (iv) f/g$$

De har följande definitionsmängder:

$$(i-iii) D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

Skärning menar både D_f och D_g

$$(iv) D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g : g(x) = 0\}$$

Exempel 9: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [0, \infty)$

$$h(x) = x^2 + \sqrt{x} \Rightarrow D_h = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [0, \infty) = [0, \infty)$$

$$w(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} \Rightarrow D_w = D_f \cap D_g \setminus \{0\} = [0, \infty) \setminus \{0\} =$$

$(0, \infty)$
↑
eftersom $\sqrt{x} = 0$ om $x = 0$

Exempel 10: $f(x) = \sqrt{-x}$, $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = (-\infty, 0]$, $D_g = [0, \infty)$

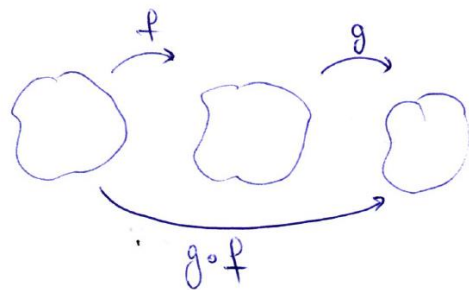
$$h(x) = \sqrt{-x} + \sqrt{x}, \quad D_h = (-\infty, 0] \cap [0, \infty) = \{0\}$$

$$w(x) = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad D_w = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset \quad \text{tomma mängden}$$

Sammansättningen av f och g, $(g \circ f)(x) = gf(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$



Obs! I allmänt gäller att $f \circ g \neq g \circ f$

Exempel 11: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = e^x$, $D_f = [0, \infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}, \quad D_{g \circ f} = [0, \infty)$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \sqrt{e^x} = e^{x/2}, \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

Exempel 12: $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f \circ f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$D_{f \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$