

MVE535 Föreläsning 3

Exponential- och logaritmfunktioner

Inversa funktioner

Inversa funktioner

Låt $y = f(x)$ vara en funktion. Som vi vet kan man beräkna funktionens värde $f(x)$ för varje x från definitionsmängden. Det också finns situationer när man vet funktionens värde $y = f(x)$ och man vill beräkna x . Ett exempel är koppling mellan personer och deras personnummer. Om A är mängden av alla personer i Sverige, B är mängden av alla befintliga personnummer, kan man definiera funktion f så att

$$f: A \rightarrow B, f(\text{person}) = \text{personnummer}.$$

Om man vet personnummer kan man hitta person som motsvarar det personnummer. Mer matematiskt kan man säga att funktion f^{-1} som kopplar personnummer med person är inversen till funktion f (som kopplar varje person till sin personnummer).

Vad måste funktion f uppfylla för att ha en invers?

Har alla funktioner inversa funktioner?

Definition 1: Funktion f är injektiv (eng: one-to-one) om

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

eller

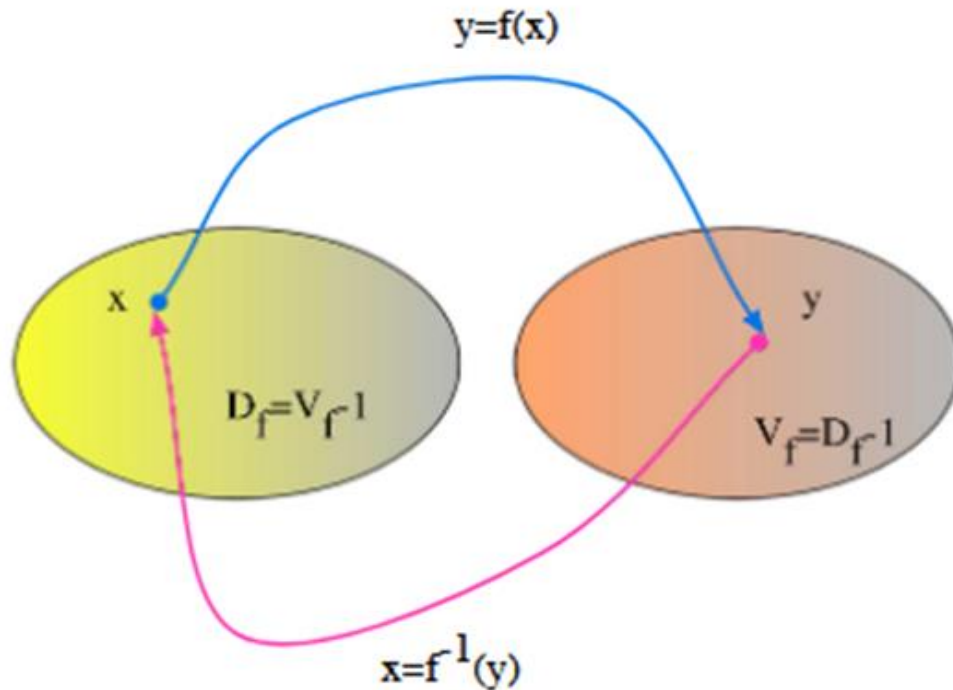
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Definition 2: Låt $f: D_f \rightarrow V_f$ vara injektiv funktion. Det finns en invers funktion f^{-1} så att

$$f^{-1}: V_f \rightarrow D_f, \quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Vi säger att f är **omvändbar/inverterbar**.

Det gäller att $D_{f^{-1}} = V_f$ och $V_{f^{-1}} = D_f$



OBS! f^{-1} är en invers, inte exponent

Det stämmer inte att

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Exempel 1: Visa att $f(x) = 2x - 1$ är injektiv och beräkna inversen.

Lösning:

Injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow$

$x_1 = x_2$ och f är injektiv

Inversen: $y = 2x - 1 \Rightarrow 2x = y + 1 \Rightarrow$

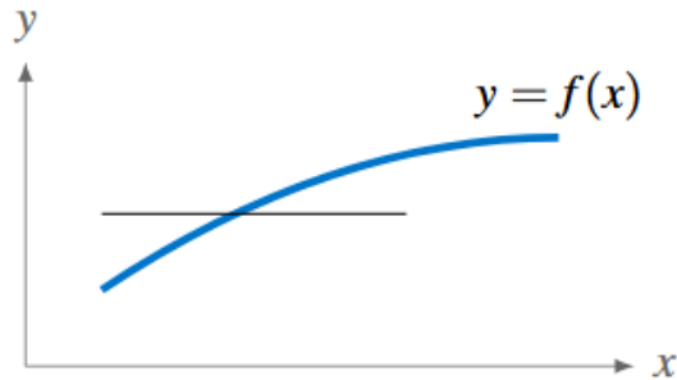
$$x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y + 1)$ och vi skriver $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$

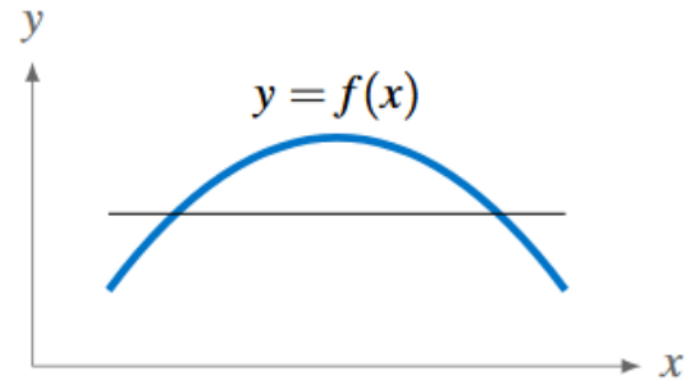
eftersom vi brukar ha x
som oberoende
variabel!

Tänke är att uttrycka x
med hjälp av y

Om en funktion skall vara omvändbar, innebär det att varje linje, parallell med x-axeln, f ar skära funktionens graf i högst en punkt. Det får alltså inte finnas flera x-värden för ett specifikt y-värde.



(a) f är omvändbar



(b) f är inte omvändbar

Definition 3: Att en funktion är **växande** på ett intervall innebär att om x_1 och x_2 är två punkter i intervallet sådana att $x_1 < x_2$, så gäller $f(x_1) \leq f(x_2)$. Funktionen sägs vara **strängt växande** om det gäller att $f(x_1) < f(x_2)$.

Definition 4: Att en funktion är **avtagande** på ett intervall innebär att om x_1 och x_2 är två punkter i intervallet sådana att $x_1 < x_2$, så gäller $f(x_1) \geq f(x_2)$. Funktionen sägs vara **strängt avtagande** om det gäller att $f(x_1) > f(x_2)$.

Fråga 1: Är växande, avtagande, strängt växande eller strängt avtagande funktioner omvändbara?

Exempel 2: Vad är invers till $f(x) = x^3 + 2$?

Lösning:

$$y = x^3 + 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Byta x och y : $y = \sqrt[3]{x - 2}$

Invers funktion är $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

Exempel 3: Visa att $g(x) = \sqrt[3]{x - 2}$ är invers till $f(x) = x^3 + 2$.

Lösning: Vad händer om vi sammansätta f och g ?

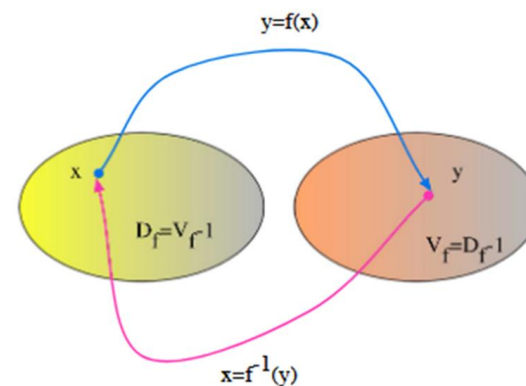
$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x - 2}) = (\sqrt[3]{x - 2})^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$g(f(x)) = g(x^3 + 2) = \sqrt[3]{x^3 + 2 - 2} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

OBS! Funktion och inversen tar ut varandra.



$$g(x) = f^{-1}(x)$$



Exempel 5: Finns det inversen till?

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = |x|$

Exponentialfunktioner

Funktion $f(x) = a^x$ där $a > 0$ är en konstant och x är variable kallas för exponentialfunktion.

Exponentialreglerna ($a, b > 0, x, y \in R$)

1. $a^x + a^y = a^{x+y}$

2. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

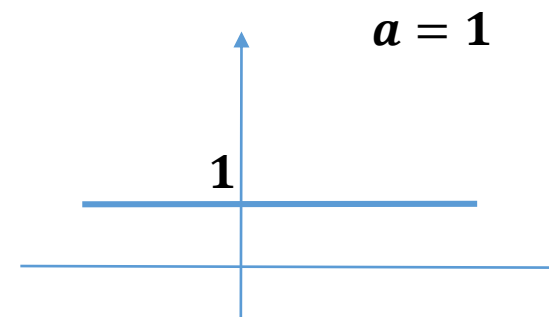
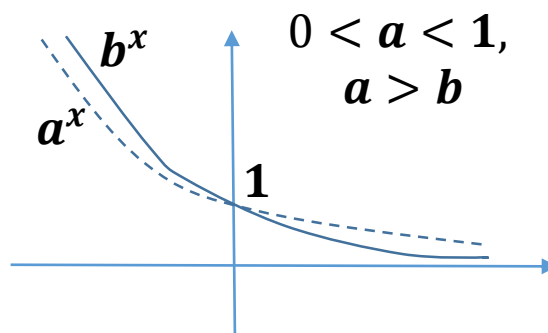
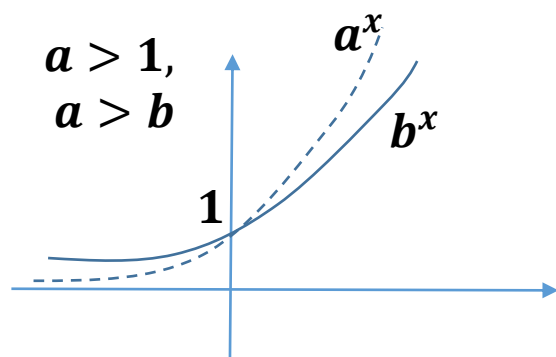
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

4. $(a^x)^y = a^{xy}$

5. $(ab)^x = a^x b^x$

Vad är D_f, V_f för $f(x) = a^x$
och $f(x) = e^x$?

Grafen till $f(x) = a^x$



Naturliga exponentialfunktionen om $a = e = 2.7 \dots, f(x) = e^x$

Logaritmfunktioner

Funktion $f(x) = a^x$ är injektiv för alla $a \neq 1$ så har den en invers som kallas logaritmfunktion i bas a och betecknas $f^{-1}(x) = \log_a x$.

- $\log_a x: [0, \infty) \rightarrow R$
- $\log_a a^x = x$ för varje $x \in R$ och $a^{\log_a x} = x$ för varje $x \in [0, \infty)$
- $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

Exempel 6: $\log_2 \sqrt{\frac{1}{8}} = \log_2 (2^{-3})^{1/2} = \log_2 2^{-3/2} = -\frac{3}{2}$

Exempel 7: Bestäm D_f till $\log_3(x - 2)$

Lösning: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow D_f = (2, \infty)$