MVE535 Föreläsning 4

Exponential- och logaritmfunktioner

Inversa funktioner

Exponentialfunktioner

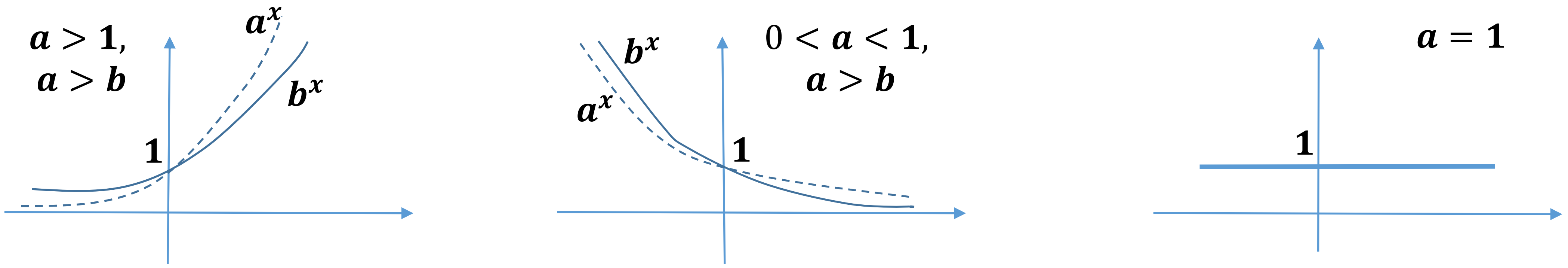
Funktion $f(x) = a^x$ där $a > 0$ är en konstant och x är variable kallas för exponentialfunktion.

Exponentialreglerna $(a, b > 0, \quad x, y \in R)$

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$

Vad är D_f, V_f för $f(x) = a^x$ och $f(x) = e^x$?

Grafen till $f(x) = a^x$



Naturliga exponentialfunktionen om $a = \mathrm{e} = 2.7\ldots$, $f(x) = e^x$

Logaritmfunktioner

Funktion $f(x) = a^x$ är injektiv för alla $a \neq 1$ så har den en invers som kallas logaritmfunktion i bas a och betecknas $f^{-1}(x) = \log_a x$.

- $\log_a x\colon [0, \infty) \to R$
- $\boldsymbol{\log_a a^x = x}$ för varje $x \in R$ och $\boldsymbol{a^{\log_a x} = x}$ för varje $x \in [0, \infty)$
- $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

Exempel 1: $\log_2 \sqrt{\frac{1}{8}} = \log_2 (2^{-3})^{1/2} = \log_2 2^{-3/2} = -\frac{3}{2}$

Exempel 2: Bestäm D_f till $\log_3(x-2)$

Lösning: $x - 2 > 0 \;\Rightarrow x > 2 \;\Rightarrow D_f = (0, \infty)$

Logaritmreglerna: Om $x, y, a > 0, a \neq 1$

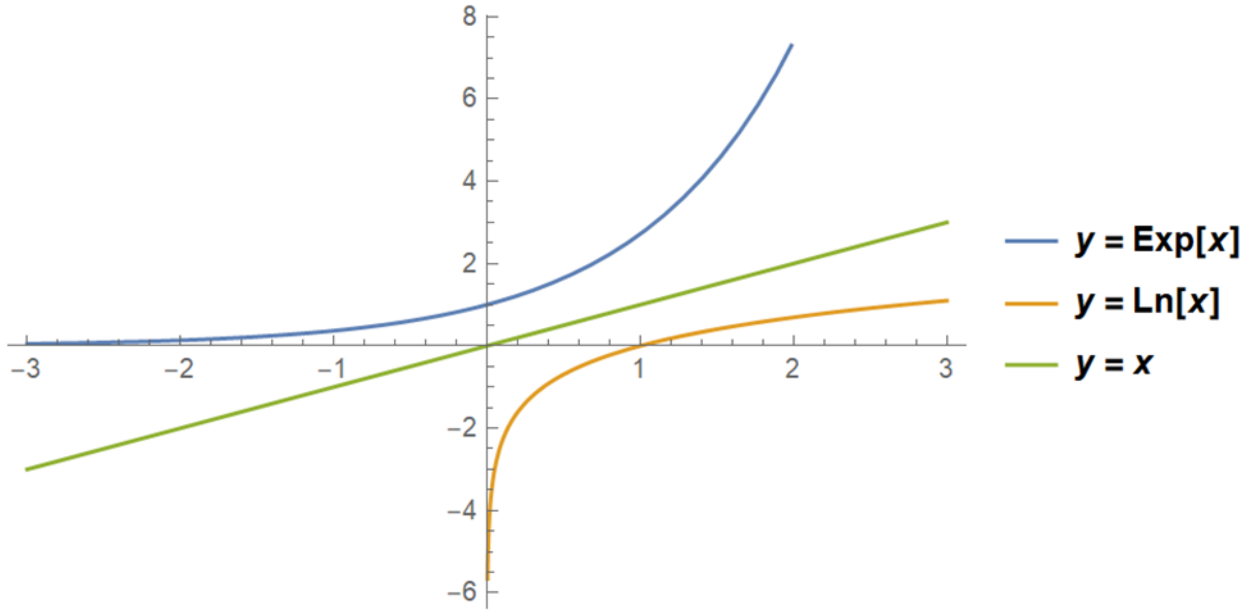
1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^y = y \log_a x$

Exempel 3: $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \frac{80}{5} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4$

Exempel 4: $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$ för alla $a \in (0, \infty) \backslash \{1\}$

Definition: Inversen till $f(x) = e^x$ kallas för den naturliga logaritmen och betecknas $\ln x$.

Sats: Om $a > 0, a \neq 1$, så $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.



Man reflekterar graf till funktion kring linje y=x för att få grafen till inversen.

Exempel 5: Lösa ekvationen $e^{5-3x} = 10$

Lösning: $e^{5-3x} = 10$ \tar vi ln på båda sidor, ln injektiv! Exp injektiv!

$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$