

MVE535 Föreläsning 4

Exponential- och logaritmfunktioner

Inversa funktioner

Exponentialfunktioner

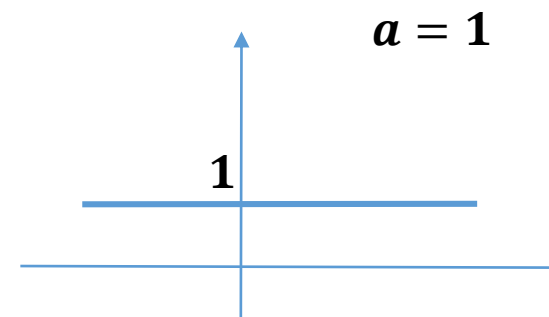
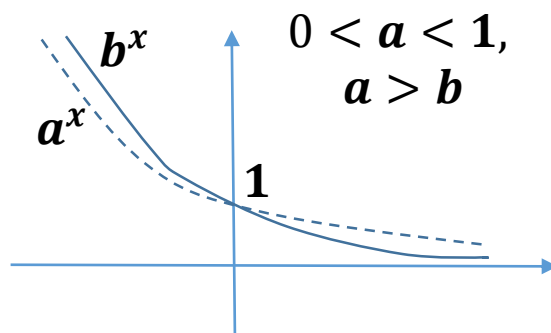
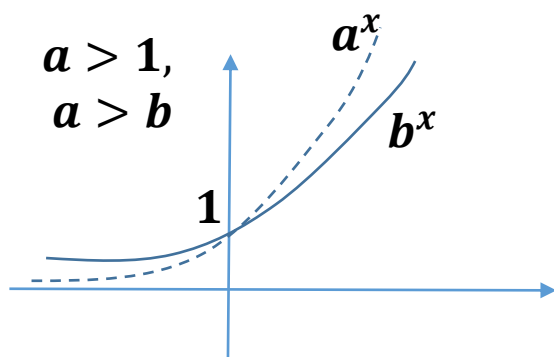
Funktion $f(x) = a^x$ där $a > 0$ är en konstant och x är variable kallas för exponentialfunktion.

Exponentialreglerna ($a, b > 0, x, y \in R$)

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$

Vad är D_f, V_f för $f(x) = a^x$
och $f(x) = e^x$?

Grafen till $f(x) = a^x$



Naturliga exponentialfunktionen om $a = e = 2.7 \dots, f(x) = e^x$

Logaritmfunktioner

Funktion $f(x) = a^x$ är injektiv för alla $a \neq 1$ så har den en invers som kallas logaritmfunktion i bas a och betecknas $f^{-1}(x) = \log_a x$.

- $\log_a x: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
- **$\log_a a^x = x$** för varje $x \in \mathbb{R}$ och **$a^{\log_a x} = x$** för varje $x \in [0, \infty)$
- $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

Exempel 1: $\log_2 \sqrt{\frac{1}{8}} = \log_2 (2^{-3})^{1/2} = \log_2 2^{-3/2} = -\frac{3}{2}$

Exempel 2: Bestäm D_f till $\log_3(x - 2)$

Lösning: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow D_f = (2, \infty)$

Logaritmreglerna: Om $x, y, a > 0, a \neq 1$

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

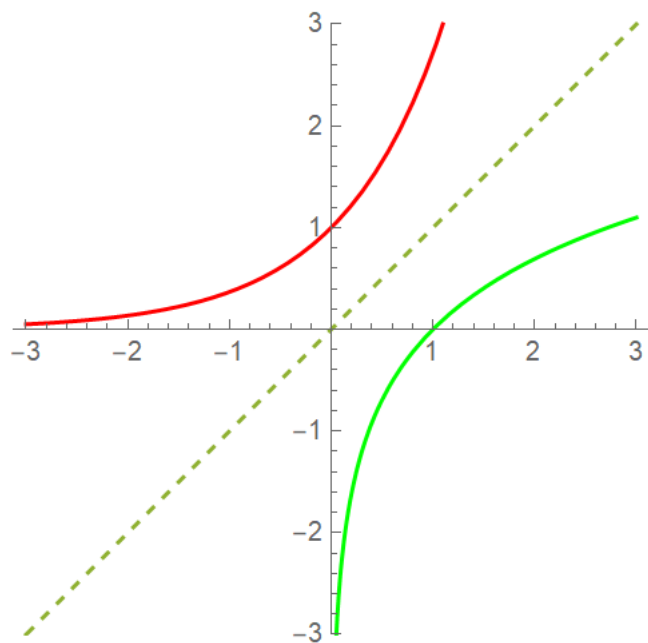
3. $\log_a x^y = y \log_a x$

Exempel 3: $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \frac{80}{5} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4$

Exempel 4: $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$ för alla $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$

Definition: Inversen till $f(x) = e^x$ kallas för den naturliga logaritmen och betecknas $\ln x$.

Sats: Om $a > 0, a \neq 1$, så $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.



Man reflekterar graf till funktion kring linje $y=x$ för att få grafen till inversen.

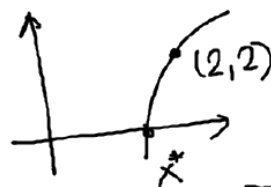
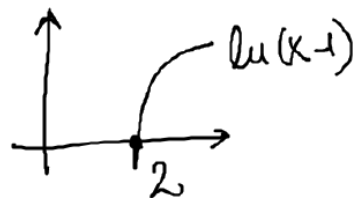
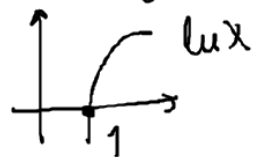
Röd linje – exponential funktion

Grön linje – $\ln(x)$

Exempel 5: Lösa ekvationen $e^{5-3x} = 10$

Lösning: $e^{5-3x} = 10$ \tar vi $\ln$ på båda sidor, $\ln$ injektiv! Exp injektiv!
 $\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$

Ex 1: $y = \ln(x-1) + 2$



$\ln$ injektiv!



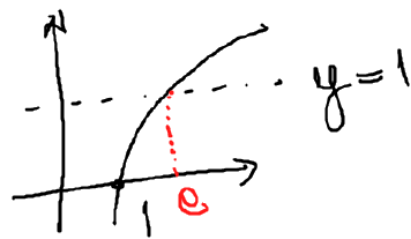
$$\ln(x-1) + 2 = 0$$

$$\ln(x-1) = -2 \quad |e$$

$$x-1 = e^{-2}$$

$$x^* = 1 + e^{-2}$$

Ex 2: Löse $\ln x < 1$.



$$\ln e = 1$$

$\ln$ växande

$$0 < x < e$$

$$\text{Ex 3: } 1 < e^{3x-1} < 2 \quad / \quad \ln, \quad e \text{ \u00e4r i\u00e4ndel\u00f6s}$$

$$\ln 1 < \ln e^{3x-1} < \ln 2 \quad / \quad \ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$$0 < 3x - 1 < \ln 2$$

$$3x - 1 > 0 \quad \text{och} \quad 3x - 1 < \ln 2$$

$$3x > 1$$

$$x > \frac{1}{3}$$

$$3x < 1 + \ln 2$$

$$x < \frac{1 + \ln 2}{3}$$

$$x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1 + \ln 2}{3} \right)$$



$\ln 2$

Ex 4: $f(x) = e^{-x^2}$ jämn/udda/annat?

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x) \rightarrow \text{jämn}$$

Ex 5: $f(x) = x^5 + \ln(x+1)$

$$\mathcal{D}_f = (-1, \infty)$$

motiveringen
krävs på
duggor/tentor

och det går inte att diskutera om f är jämn eller udda eftersom f är inte definerade för alla negativa x . T.ex vi kan jämföra $f(-0.3)$ med $f(0.3)$, men vi kan inte jämföra $f(-2)$ med $f(2)$ eftersom $f(-2)$ existerar inte. Då, f är inte jämn eller udda funktion.

Ex 5: $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$. Vad är $\mathcal{D}_f$ och V_f ?

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \text{ eftersom } 2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{D}_f = V_{f^{-1}}, \quad V_f = \mathcal{D}_{f^{-1}} \rightarrow \text{vi kommer att använda den här egenskapen}$$

$$y = \frac{x+1}{2x+1}$$

$$(2x+1)y = x+1$$

$$(1-2y)x = y-1$$
$$x = \frac{y-1}{1-2y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{1-2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{1-2x}$$

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow V_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

OBS! Man kan använda gränsvärde och derivat för att undersöka $f(x)$ på ett vanligt sätt, men här vi vill öva inversa funktioner.

Lite extra som man behöver inte just nu men som dök upp på föreläsningen.

Här finns grafen till funktion $f(x)$ (blå linje). Vi kan se att $y=1/2$ är *vågrät* (horisontell) asymptot och $x=-1/2$ är *lodrät* (vertikal) asymptot.

