

MVE535 Föreläsning 5

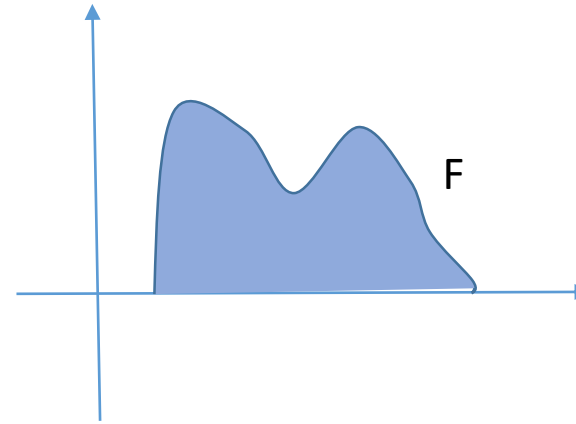
Gränsvärden - definition och räkneregler

Motivering

Avsnitt 2.1 och början av 2.2 - motiveringen varför gränsvärder är intressanta (tangenter, hastigheter)

Vi har en annan motiveringen – att fundera om vad folk ville och vill förstå

- Vad är summan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$?
- Hur mycket är $0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$?
- Vad är arean av figur F?
- Hur fungerar hastighetsmätare i bilen?
- Zenons paradoxer (kolla upp på Wikipedia)
summan av de oändligt antalet delar blir en ändligt stor helhet



Syfte med matematisk analys: att beräkna uttryck som inte kan beräknas med hjälp av algebra, men som måste approximeras först med algebraiska uttryck och sedan beräknas genom att ta gränser.

Exempel 1: Vad är värde av $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ när x närmar sig 3?

Exempel 2: Vad är konceptuellt skillnaden mellan $h = 0$ och $h \rightarrow 0$?

e – elefant, m – myra, $d=e-m$

Då har vi

$$e(e - m) = (m + d)(e - m)$$

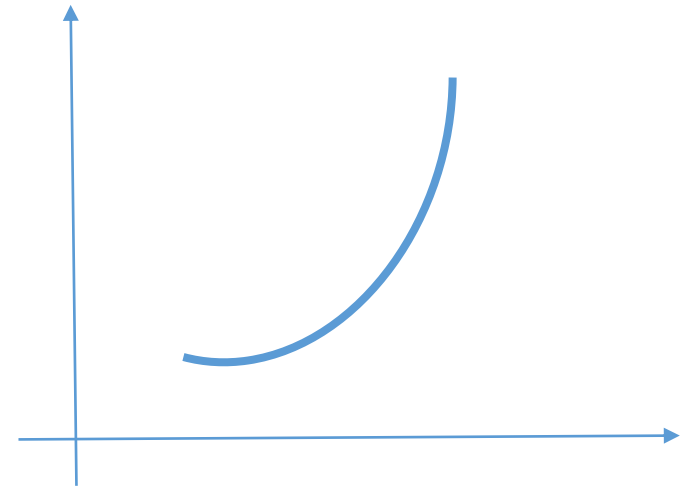
$$e^2 - em = em + ed - m^2 - md$$

$$e^2 - em - ed = em - m^2 - md$$

$$e(e - m - d) = m(e - m - d)$$

Om man tillåter division med noll kan man bevisa att elefant och myra har samma vikten! Men det är meningslöst.

$$\text{Lutning} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



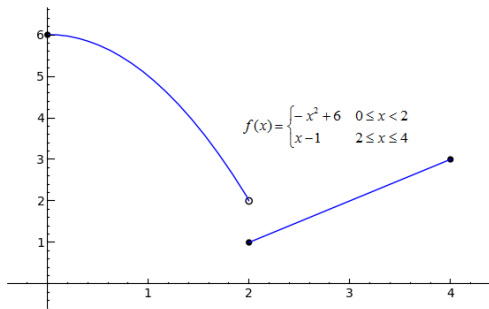
Intuitivt definition av gränsvärde: Låt $f(x)$ vara definerad nära a . Vi skriver $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ om $f(x)$ är oändligt nära L när x är oändligt nära a .

Exempel 3:

- $f(x) = \frac{x^2-2}{x^3+x+1}, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{3}$

- $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{om } x \neq 1 \\ 2 & \text{om } x = 1 \end{cases}, \text{ då } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \frac{1}{2}$

Höger- och vänstergränsvärdet



$$\begin{aligned} x \rightarrow 2 - & \text{ då } f(x) \rightarrow 2 \\ x \rightarrow 2 + & \text{ då } f(x) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Sats: $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Om $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ existerar inte $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

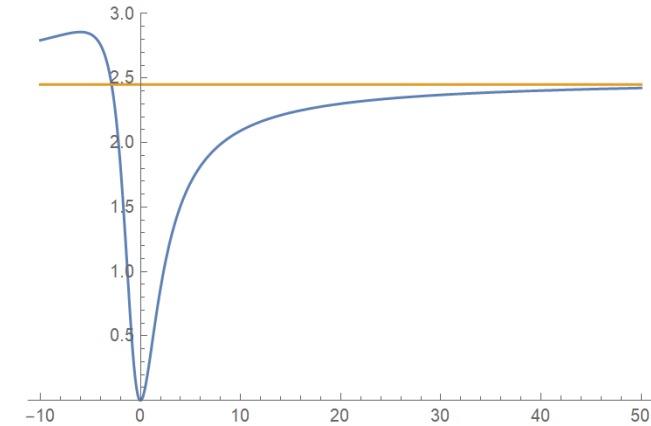
Exempel 4: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$,
 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = ?$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = ?$

Horisontella asymptoter

Om en funktion $f(x)$ har gränsvärdet A då x går mot oändligheten så kommer grafen av $f(x)$ att närma sig linjen $y = A$. Linjen $y = A$ är en horisontell asymptot till $f(x)$.

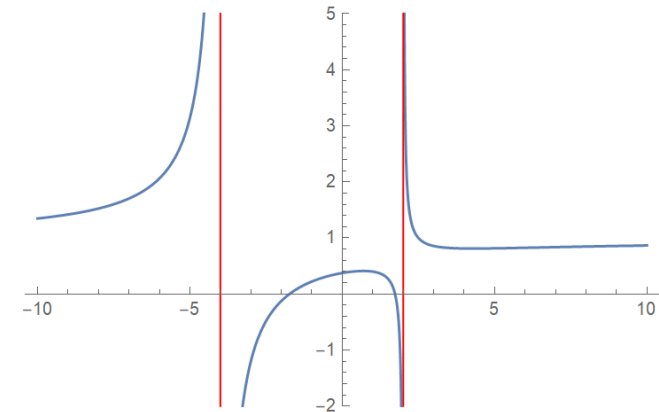
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots$$

$$f(x) = \frac{5x^2}{2x^2 + 3x + 9}$$



Oändligheten som gränsvärde, vertikala asymptoter

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$$



Räknereregler för gränsvärden

Anta $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_f$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_g$.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL_f,$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_f + L_g,$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L_f - L_g,$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L_f L_g,$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_f}{L_g}, \quad L_g \neq 0,$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)^p = L_f^p, \quad L_f \neq 0 \text{ om } p < 0.$$

Exempel 5:

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x^2-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right)$

Sats: Om $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Instängningsregeln: Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ och $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, då

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Exempel 6: Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$