

MVE535 Föreläsning 6

Kontinuitet

Formell definition av gränsvärde

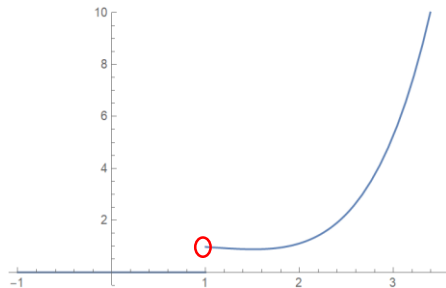
Kontinuitet

Definition 1: En funktion $f(x)$ är kontinuerlig i $a \in D_f$ om $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

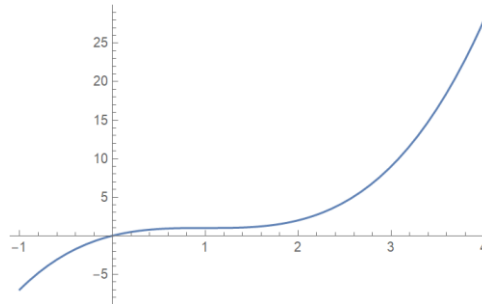
OBS! $f(x)$ är kontinuerlig i a om tre följande villkor gäller:

1. $a \in D_f$
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existerar
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

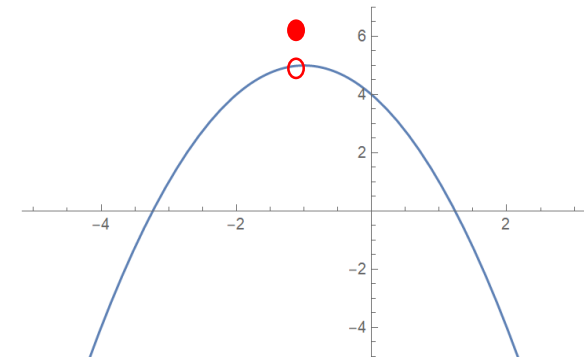
Exempel 1:



ej kontinuerlig eftersom
gränsvärde i a existerar inte
(det finns höger- och
vänstergränsvärde!)



kontinuerlig



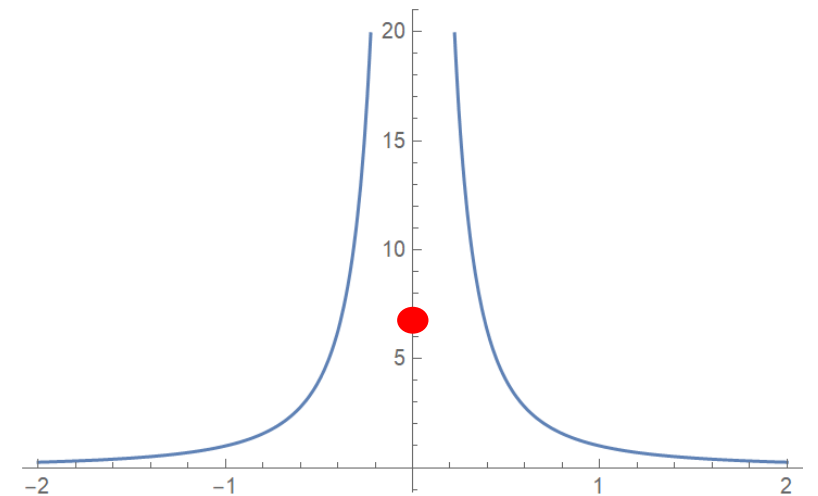
ej kontinuerlig eftersom
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

Exempel 2: I vilken punkt är $f(x)$ inte kontinuerlig?

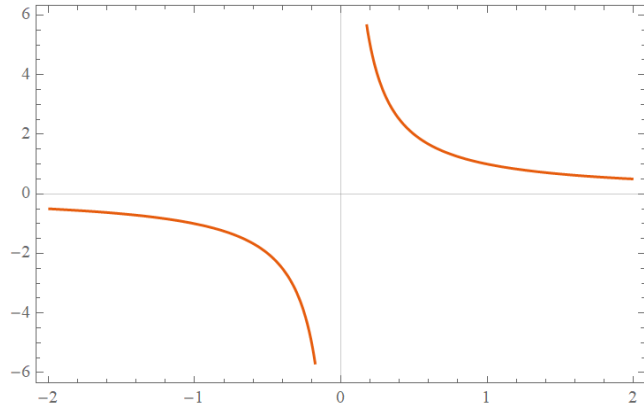
$$a) \quad f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x - 5}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 20}{x - 5} & \text{om } x \neq 5 \\ 1 & \text{om } x = 5 \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{om } x \neq 0 \\ 6 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$



Exempel 3: Är funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinuerlig?



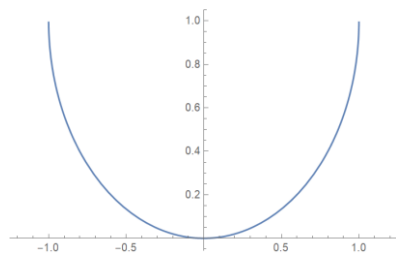
Jämför med Exempel 2c!

OBS! Intuitivt definition innebär att funktionen är kontinuerlig i a om det inte finns något hopp i a . Vi kan skissa grafen utan att lyfta pennan från pappret. Intuitivt definition också förutsätta att D_f är ett intervall och det ger inget svar på vad som händer om D_f består av två eller flera intervall.

Definition 2:

- $f(x)$ är högerkontinuerlig i a om $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$
- $f(x)$ är vänsterkontinuerlig i a om $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$
- $f(x)$ är kontinuerlig i intervall $[a, b]$ om den är kontinuerlig i alla punkter i intervallet, högerkontinuerlig och vänsterkontinuerlig i b .

Exempel 4: Visa att $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ är kontinuerlig i intervall $[-1, 1]$.



$$-1 < x < 1$$

$$D_f = ?$$

$$x = -1,$$
$$x = 1$$

Sats: Antag att f och g är kontinuerliga funktioner och $c \in \mathbb{R}$. Följande funktioner är också kontinuerliga:

cf	$f + g$	$f - g$
fg	$\frac{f}{g}, g \neq 0$	$f \circ g$

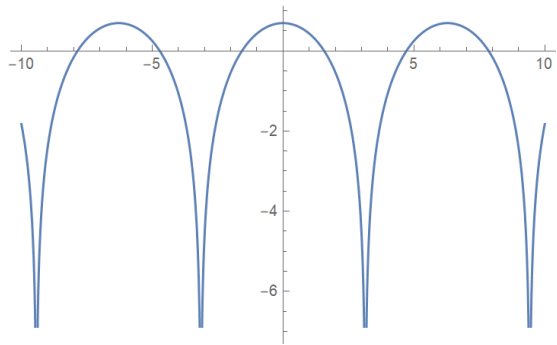
Sats: Följande klasser av funktioner är kontinuerliga där de är definierade:

Polynom	Rationella funktioner	Trigonometriska funktioner
Exponentialfunktioner	Logaritmfunktioner	Absolutbelopp

Exempel 5: I vilket intervall är kontinuerlig?

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \ln(1 + \cos x)$



Satsen om mellanliggande värden: Antag att $f(x)$ är definierade och kontinuerlig på $[a, b]$. Då antar $f(x)$ alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

Exempel 6: Visa att en rot till ekvation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ ligger i mellan 1 och 2.

Formell definition av gränsvärde (svårt!)

Antag att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Detta innebär att vi få avståndet mellan $f(x)$ och L hur litet som helst genom att låta x komma tillräckligt nära till a .

- Avstånd mellan $f(x)$ och $L = |f(x) - L|$
- Avstånd mellan x och $a = |x - a|$

Vi kan likna med en tävling mellan två deltagare, A och B.

1. A börjar med att bestämma max värde av $|f(x) - L|$, men $|f(x) - L|$ kan inte vara noll
2. B kontrollerar x och får bestämma max värde $|x - a|$
3. Om B alltid lyckas uppfylla A:s krav, gäller $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, annars inte

Exempel 7: $f(x) = 2x + 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

1. A börjar och väljer $|f(x) - 3| < 10^{-5}$
2. B funderar: $|f(x) - 3| = |2x + 1 - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1|$

Om B väljer $|x - 1| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, det följer att:

$$|f(x) - 3| = 2|x - 1| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} = 10^{-5} \text{ och A:s krav är uppfyllt dvs. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

Mer precis: om oavsett hur litet värde $|f(x) - L|$ vi väljer, så kan vi tvinga fram det genom att göra $|x - a|$ tillräckligt litet (men >0), säger vi att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Ännu mer precis betyder $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ att: oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer, kan vi tvinga fram $|f(x) - L| < \varepsilon$ genom att låta $0 < |x - a| < \delta$ för någon δ .

Matematisk: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ om och endast om det för alla tal $\varepsilon > 0$ existerar någon tal $\delta > 0$ sådant att om $0 < |x - a| < \delta$ så medför detta att $|f(x) - L| < \varepsilon$.