

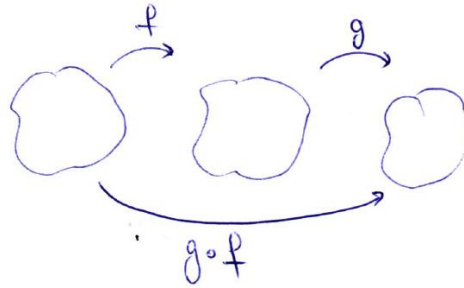
**Definition:** Två funktioner  $f$  och  $g$  är lika med varandra om och endast om

1.  $D_f = D_g$  och
2.  $f(x) = g(x)$  för alla  $x \in D_f$

**Sammanställningen av  $f$  och  $g$ ,  $(g \circ f)(\cdot)$ :**

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$



**Obs!** I allmänt gäller att  $f \circ g \neq g \circ f$

**Definition 1:** Funktion  $f$  är injektiv (eng: one-to-one) om

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

eller

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

**Definition 2:** Låt  $f: D_f \rightarrow V_f$  vara injektiv funktion. Det finns en invers funktion  $f^{-1}$  så att

$$f^{-1}: V_f \rightarrow D_f, \quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Vi säger att  $f$  är **omvändbar/inverterbar**. Det gäller att  $D_{f^{-1}} = V_f$  och  $V_{f^{-1}} = D_f$

## Exponentialfunktioner

Funktion  $f(x) = a^x$  där  $a > 0$  är en konstant och  $x$  är variable kallas för exponentialfunktion.

**Exponentialreglerna** ( $a, b > 0, x, y \in R$ )

1.  $a^x + a^y = a^{x+y}$
2.  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
3.  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4.  $(a^x)^y = a^{xy}$
5.  $(ab)^x = a^x b^x$

**Logaritmreglerna:** Om  $x, y, a > 0, a \neq 1$

1.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2.  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3.  $\log_a x^y = y \log_a x$

**Definition 3:** Att en funktion är **växande** på ett intervall innebär att om  $x_1$  och  $x_2$  är två punkter i intervallet sådana att  $x_1 < x_2$ , så gäller  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Funktionen sägs vara **strängt växande** om det gäller att  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**Definition 4:** Att en funktion är **avtagande** på ett intervall innebär att om  $x_1$  och  $x_2$  är två punkter i intervallet sådana att  $x_1 < x_2$ , så gäller  $f(x_1) \geq f(x_2)$ . Funktionen sägs vara **strängt avtagande** om det gäller att  $f(x_1) > f(x_2)$ .

**Definition:** En funktion  $f$  kallas

- a) Jämn om  $f(-x)=f(x)$  för alla  $x \in D_f$
- b) Udda om  $f(-x)=-f(x)$  för alla  $x \in D_f$

**Obs!** Innan kan vi undersöka om  $f$  är jämn/udda måste vi kontrollera om  $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$  stämmer för alla  $x$ .

## Gränsvärden

**Sats:**  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Om  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  då  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existerar inte

**Sats:** Om  $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

**Instängningsregeln:** Om  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  och

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ , då  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ .

## Räkneregler för gränsvärden

Anta  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_f$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_g$ .

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL_f,$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_f + L_g,$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L_f - L_g,$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L_f L_g,$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_f}{L_g}, \quad L_g \neq 0,$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)^p = L_f^p, \quad L_f \neq 0 \text{ om } p < 0.$$

## Kontinuitet

**Definition 1:** En funktion  $f(x)$  är kontinuerlig i  $a \in D_f$  om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

**OBS!**  $f(x)$  är kontinuerlig i  $a$  om tre följande villkor gäller:

1.  $a \in D_f$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existerar
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

### Definition 2:

- $f(x)$  är högerkontinuerlig i  $a$  om  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$
- $f(x)$  är vänsterkontinuerlig i  $a$  om  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$
- $f(x)$  är kontinuerlig i interval  $[a, b]$  om den är kontinuerlig i alla punkter i intervallet, högerkontinuerlig i  $a$  och vänsterkontinuerlig i  $b$ .

**Satsen om mellanliggande värden:** Antag att  $f(x)$  är definerade och kontinuerlig på  $[a, b]$ . Då antar  $f(x)$  alla värden mellan  $f(a)$  och  $f(b)$ .

**Sats:** Antag att  $f$  och  $g$  är kontinuerliga funktioner och  $c \in \mathbb{R}$ . Följande funktioner är också kontinuerliga:

|      |                         |             |
|------|-------------------------|-------------|
| $cf$ | $f + g$                 | $f - g$     |
| $fg$ | $\frac{f}{g}, g \neq 0$ | $f \circ g$ |

**Sats:** Följande klasser av funktioner är kontinuerliga där de är definerade:

|                       |                       |                            |
|-----------------------|-----------------------|----------------------------|
| Polynom               | Rationella funktioner | Trigonometriska funktioner |
| Exponentialfunktioner | Logaritmfunktioner    | Absolutbelopp              |