

MVE535 Föreläsning 8

Derivator av potens- och exponentialfunktioner.
Deriveringsregler.

Exempel 1: Visa att funktion $f(x) = 2e^x + 3x + 5x^3$ har ingen tangent med lutningen 2.

Exempel 2: I vilken punkt har $y = e^x$ tangent parallell med linje $y = 2x$?

Produkt- och kvotregeln

Sats: Antag att f och g är deriverbara i $a \in D_f \cap D_g$. Då gäller att:

$$1. (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)'g(x)$$

$$2. \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$3. \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)'g(x)}{(g(x))^2}$$

OBS!

$$(fg)' \neq f'g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{f'}{g'}$$

Bevis: 1.
$$(fg)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - \cancel{f(x)g(x+h)} + \cancel{f(x)g(x+h)} - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$2. \left(\frac{1}{f}\right)'(x) =$$

$$3. \left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$$

Exempel 3: Beräkna derivatan till:

$$a) \quad f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

$$b) \quad f(x) = (x^3 + 1)e^x$$

$$c) \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x}$$

Kedjeregeln

Sats: Antag att g är deriverbar i x och f är deriverbar i $g(x)$. Då är $f \circ g$ deriverbar i x och $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Exempel 4: Beräkna derivatan till

1. $f(x) = e^{-x^2-x}$

2. $\sqrt[3]{1+x^3}$

Exempel 4*: Beräkna derivatan till

1. $f(x) = e^{-x^2-x}(2x+1)^2$

2. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x^3+1}}$

Exempel 5: Beräkna derivatan till

1. $f(x) = 2^{x^2} 3^{x^2}$

2. $f(x) = x^x$