MVE535 Föreläsning 9

Implicit derivering.
Trigonometriska funktioner

Implicit derivering

Antag att vi vill bestämma tangentlinjen till en cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ i punkt $P(a, b)$ som ligger på cirkeln. Problemet här är att vi kan inte hitta k på vanligt sätt dvs. vi kan inte derivera cirkelns ekvation eftersom det är inte en funktion (kom ihåg vertikal linje test). Vi kan använda **implicit derivering**:

$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(r^2)$ /här antag vi att $y = y(x)$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$$ då $y \neq 0$

Om punkt är $(1, \sqrt{3})$ har vi att $k = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ och $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + m$.

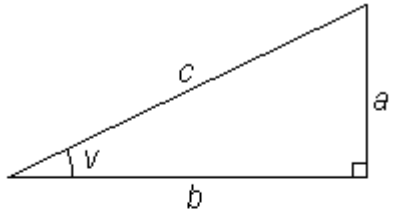
$(1, \sqrt{3})$: $\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} + m$ och $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ dvs. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$

Exempel 1: Bestäm y' om $x^2 + 2x - xy = x^3$.

Exempel 2*: $e^{2x+3y} = x^2 - \ln xy^3$

Exempel 3: Bestäm tangent i punkt (0,-1) till kurvan $x^5 - y^5 + x - y = 2$.

Grundläggande trigoneometri



$$\sin v = \frac{a}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}}$$

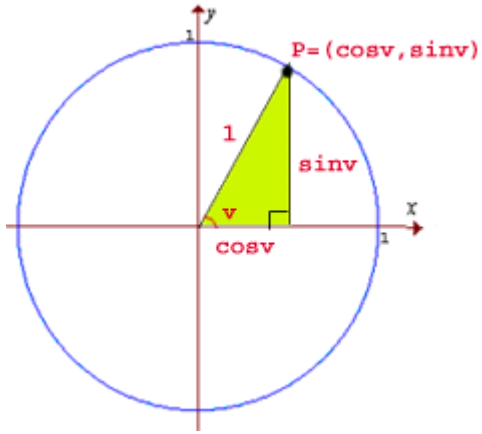
$$\cos v = \frac{b}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$$

$$\tan v = \frac{a}{b} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$$

$$\cot v = \frac{b}{a} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{motstående katet}}$$

Två olika sätt att prata om vinklar:

- 1 varv = 360 grader
- 1 varv = 2π radianer



Viktiga indentiteter

1. $\sin(-x) = -\sin x\,, \cos(-x) = \cos x$
2. $\sin^2 x + \cos\text{^}2\, x = 1$
3. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
4. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

	$\mathbf{0}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

Exempel 1: Bevisa att:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x\,, \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

b) $\cos(\pi - x) = -\cos x\,, \sin(\pi - x) = \sin x$

c) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

d) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Sats: $\lim_{x \to 0} \frac{sin\ x}{x} = 1$

Exempel 2: Beräkna

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin\ 2x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

Lemma (hjälpsats): $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Sats:

1. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

2. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

3. $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$