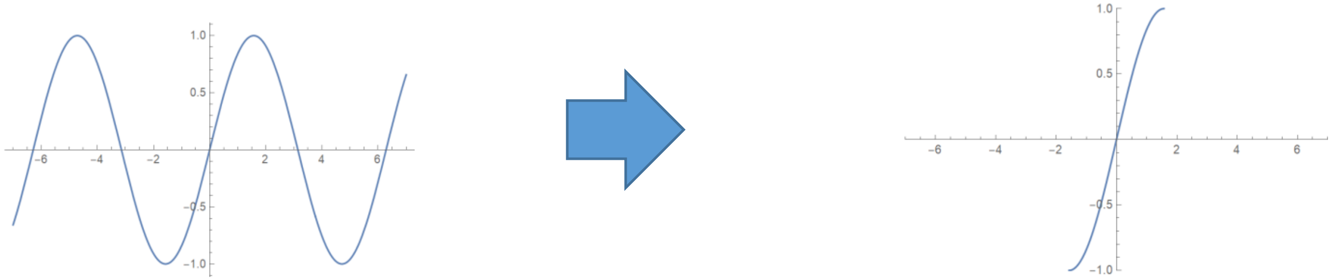
Föreläsning 10

Arcusfunktioner och deras derivator

Vi vill ha invers till f(x)=sin x men problem är att sin funktion är inte injektiv.
Lösning: att begränsa definitionsmängden.



$\sin x$ är injektv på intervallet $[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin x$ är inverterbar på intervallet $[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$V_{\sin x}\ = [-1{,}1]$ på $[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Definition: arcsin betecknar invers till $\sin$ funktion på intervallet $[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dvs.

$$\mathbf{arcsin}\colon [-\mathbf{1},\mathbf{1}] \to \mathbf{[}\text{-}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}},\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}]$$

$$\mathbf{sin}(\mathbf{arcsin}\,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in [-\mathbf{1},\mathbf{1}]$$

$$\mathbf{arcsin}(\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{[}\frac{-\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}},\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}]$$

Exempel 1:

a) $\sin(\arcsin 1) =$

b) $\arcsin(\sin\frac{\pi}{4}) =$

c) $\sin(\arcsin 2) =$

d) $\arcsin\frac{1}{2} =$

e) $\arcsin(\sin\frac{3\pi}{2}) =$

f) $\tan(\arcsin x) =$

Sats: Om f^{-1} är inversen till f så gäller att

$$\boldsymbol{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Bevis: $f \circ f^{-1}(x) = x$ derivera båda sidor + kedjeregel

$$f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Sats: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Bevis: $(\arcsin x)' = (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Vi vill ha invers till cos funktion med det är inte injektive på R.
Lösning: begränsa intervallet till $[0, \pi]$

$$\mathbf{arccos}: [-\mathbf{1}, \mathbf{1}] \to [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$$

$$\mathbf{cos}(\mathbf{arccos}\, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in [-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$$

$$\mathbf{arccos}(\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$$

$$\mathbf{arccos}\, \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} - \mathbf{arcsin}\, \boldsymbol{x}$$

Vad är $(\mathbf{arccos}\, \boldsymbol{x})'$?

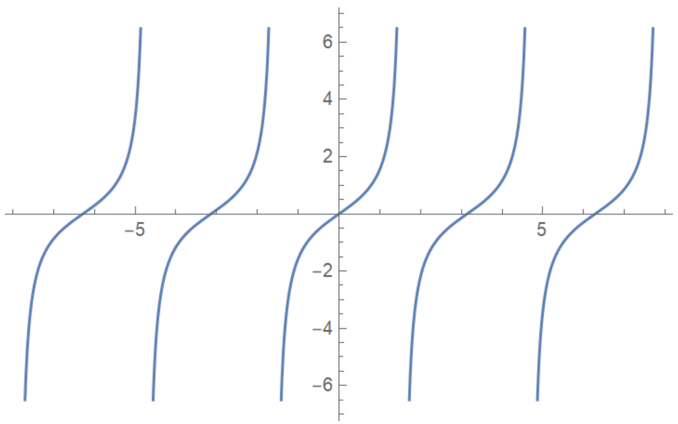
Exempel:

$a)$ $\arccos 0 =$

$b)$ $cos\left(arccos\ (-3)\right) =$

$c)$ $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{4})) =$

tan är inte injektiv!
Begränsa D_{tan}



$$\mathbf{arctan}: \boldsymbol{R} \to [\frac{-\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}]$$

$$\mathbf{tan}(\mathbf{arctan}\, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$$

$$\mathbf{arctan}(\mathbf{tan}\, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in [-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}]$$

Sats: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$