

Föreläsning 11

Exponentiell tillväxt och avtagande.
Relaterade hastigheter.
Linjär approximation.

Exponentiell tillväxt och avtagande

En vanlig tillämpning av derivator är att lösa differentialekvationer (ODE:n): bestäm funktion $y(t)$ så att

$$y'(t) = ky(t), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Vi ofta har begynnelsevärdes problem att lösa:

$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = ky(t), & k \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

dvs. vi vill hitta funktion $y(t)$ som uppfyller differentialekvationen och begynnelse villkor.

Sats: (*) har lösning $y(t) = y_0 e^{kt}$.

Bevis: Antag att $y(t) = Ce^{kt}$ är lösning. Det följer att $y'(t) = Cke^{kt}$. Stoppa den i (*) :

$$\begin{cases} Cke^{kt} = Cke^{kt} \\ y(0) = y_0 = C \end{cases}$$

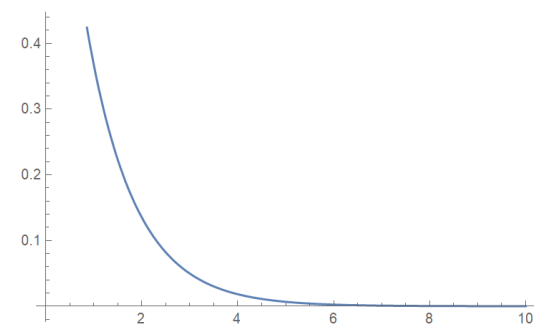
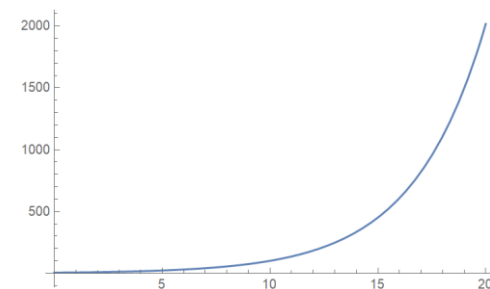
Så, $C = y_0$ och lösningen är $y(t) = y_0 e^{kt}$

Exempel 1:

$$a) \begin{cases} y'(t) = 0.3y(t), & k \in R \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y'(t) = -y(t), & k \in R \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y'(t) = ky(t), & k \in R \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



Exempel 2 (Populationstillväxt, sida 237): $\frac{dP}{dt} = kP$

Exempel 3 (Newtons avsvlningslag, sida 240):

Relaterade hastigheter (exempel 4, sidan 247)

Linjär approximation

$f(x)$ funktion, $y(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ är ekvation av tangentlinjen till $f(x)$ i punkt $(a, f(a))$

Exempel 5: Hitta tangentlinjen till $f(x) = x^2$ i $a = 2$.

Om man vill beräkna $f(x)$ för x nära a kan man approximera $f(x)$ med $f'(a)(x - a) + f(a)$:

$$\begin{aligned} f(2 + 0,001) &= 2,001^2 \\ f(2 + 0,001) &= 4(2 + 0,001 - 2) \end{aligned}$$

$L(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ kallas för linjär approximation av f i a

Exempel 6: Beräkna $\sin(\frac{\pi}{3} - 0,001)$ med linjär approximation.

$$L\left(\frac{\pi}{3} - 0,001\right) = \sin'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 0,001\right) + \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} \cdot 0,001 + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot 0,001 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$