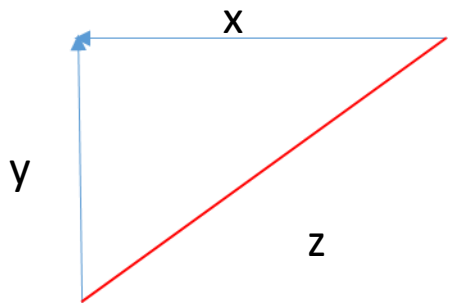


Föreläsning 12

Relaterade hastigheter.

Extremvärden. Medelvärdessatsen.

Relaterade hastigheter (exempel 4, sida 247)



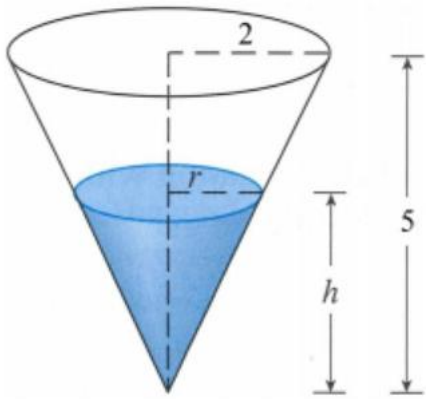
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -90 \text{ km/h} \\ \frac{dy}{dt} &= -100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ \frac{dz}{dt} &= ?\end{aligned}$$

$$x = 60 \text{ m} = 0.06 \text{ km}$$

$$y = 80 \text{ m} = 0.08 \text{ km}$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Exempel 2: En vattentank har formen av en upp och ned vänd kon med toppradie $R = 2m$ och höjden $H = 5m$. Vattnet rinner ut ur tanken genom ett litet hål i botten. Hur snabbt sjunker vattennivån när utflödet är $3 \frac{m^3}{min}$ och vattennivån i tanken är $h = 4m$?



$$R = 2m, H = 5m$$

$$R:H = r:h \text{ (likformighet)}$$

Sambandet mellan $V(t)$, $r(t)$, $h(t)$

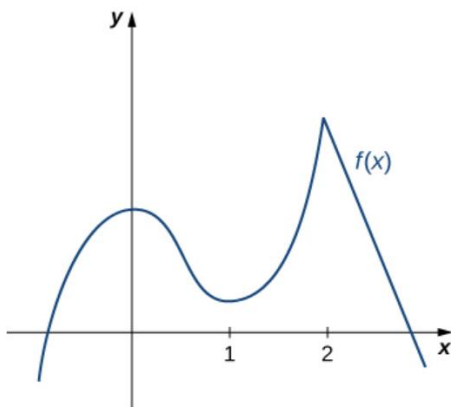
Extremvärden

Definition 1: Låt f vara en funktion och $c \in D_f$.

- a) c **global max punkt** om $f(x) \leq f(c), \forall x \in D_f$
- b) c **lokal max punkt** om $\exists h > 0$ så att $f(x) \leq f(c), \forall x \in D_f$ där $|x - c| < h$
- c) c **global min punkt** om $f(x) \geq f(c), \forall x \in D_f$
- d) c **lokal min punkt** om $\exists h > 0$ så att $f(x) \geq f(c), \forall x \in D_f$ där $|x - c| < h$
- e) Motsvarande funktionsvärde $f(c)$ kallas för en global/lokal max/min **värde**
- f) Global/lokal max/min punkter/värden kallas med en gemensama ord för **extrempunkter** resp. **extremvärden**.

OBS! Varje globalt min/max är också lokalt min/max men inte det omvända.

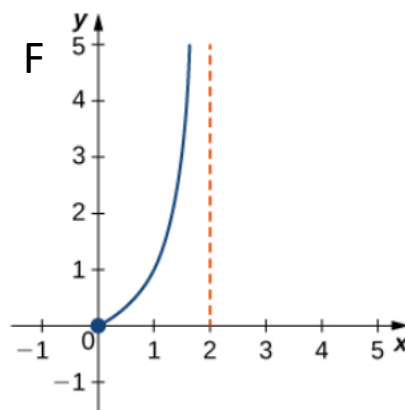
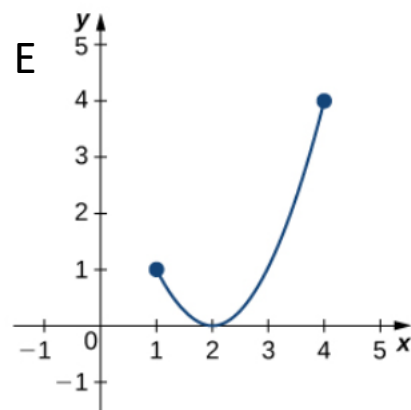
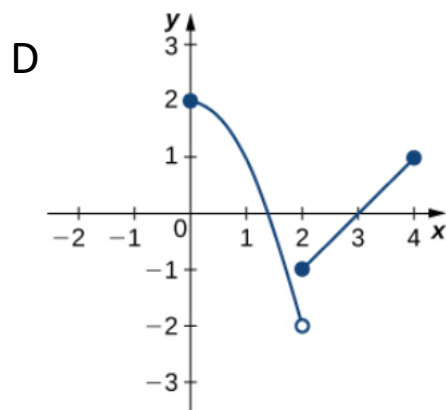
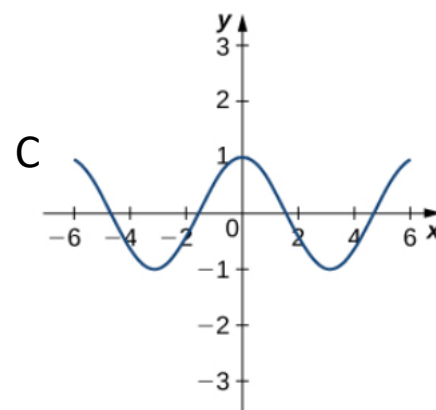
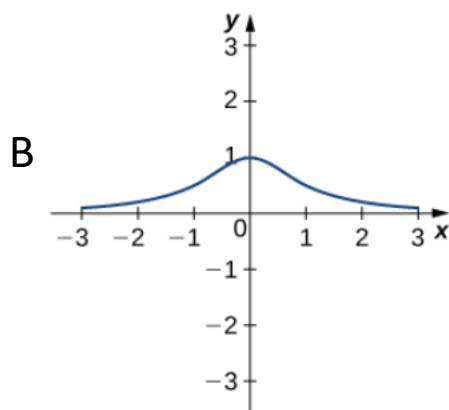
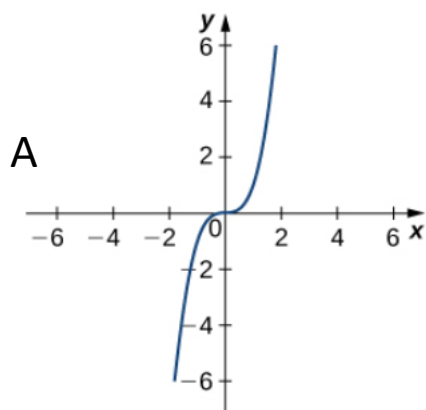
Exempel 1:



Hur vet man om/var det finns extrempunkter?

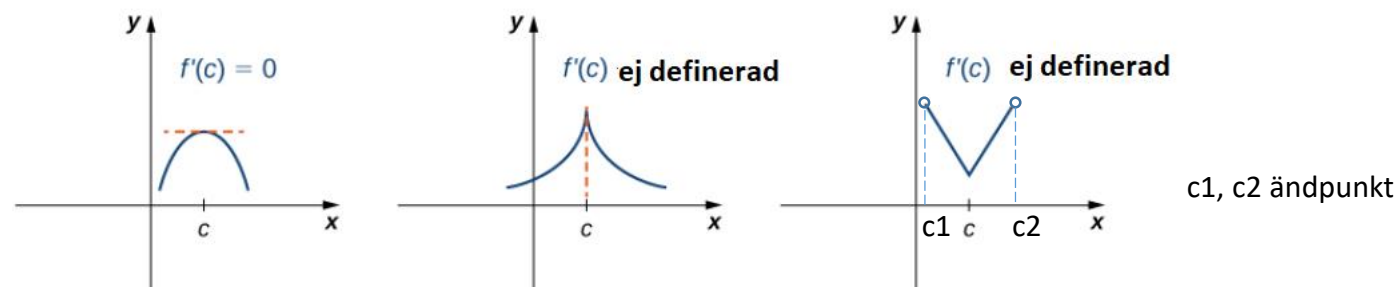
Sats 1: Om f är definierad och **kontinuerlig** på ett **slutet intervall** $[a, b]$ så antar f ett största och ett minsta värde på $[a, b]$.

Exempel 2:



Hur kan man beräkna extrempunkter/extremvärden?

Det finns flera möjligheter om c är en extrempunkt:



Sats (Fermat): Om $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ har ett lokalt extremvärde i c och om $f'(c)$ existerar, så $f'(c) = 0$.

OBS! Satsen betyder inte att $f'(c) = 0 \Rightarrow c$ är lokalt min/max.

T.ex. $f(x) = x^3$ har inte extrempunkt i 0 även om $f'(0) = 0$.

Definition 2: Punkt c kallas för kritiskpunkt om $f'(c) = 0$ eller $f'(c)$ existerar inte.

Sats 3: Om f har en lokal max/min i c , så är c en kritiskpunkt.

Exempel 3: Bestäm alla kritiska punkter och extremvärden av $f(x) = |x - 1|$ på intervall $[-2, 2]$.

Exempel 4: Bestäm global min/max av $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ på $[-1/2, 4]$.