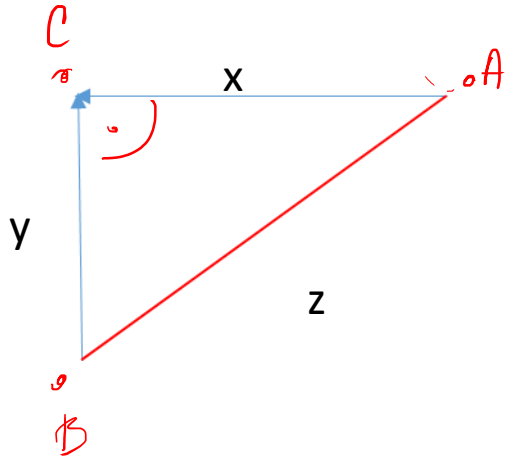


Föreläsning 12

Relaterade hastigheter.

Extremvärden. Medelvårdessatsen.

Relaterade hastigheter (exempel 4, sida 247)



$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -90 \text{ km/h} \\ \frac{dy}{dt} &= -100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ \frac{dz}{dt} &=?\end{aligned}$$

$$x = 60 \text{ m} = 0.06 \text{ km}$$

$$y = 80 \text{ m} = 0.08 \text{ km}$$

$$\underline{z^2 = x^2 + y^2} \Rightarrow z = 0.1 \text{ km}$$

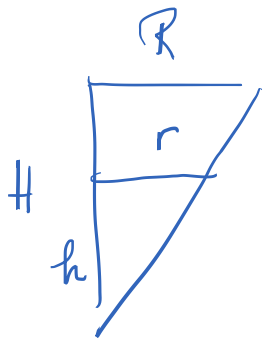
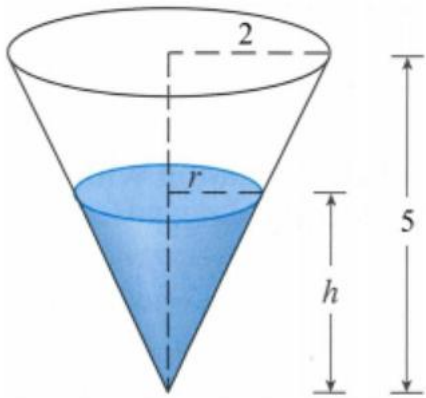
$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$z \frac{dz}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\frac{dz}{dt} = -134 \text{ km/h}$$

Exempel 2: En vattentank har formen av en upp och ned vänd kon med toppradie $R = 2m$ och höjden $H = 5m$. Vattnet rinner ut ur tanken genom ett litet hål i botten. Hur snabbt sjunker vattennivån när utflödet är $3 \frac{m^3}{min}$ och vattennivån i tanken är $h = 4m$?



$$R = 2m, H = 5m$$

$$\underline{R:H = r:h \text{ (likformighet)}}$$

$\frac{dV}{dt}$
Sambandet mellan $V(t)$, $r(t)$, $h(t)$

$$V = \frac{r^2 \pi h}{3}$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$V(t) = \frac{r^2(t) \pi h(t)}{3}$$

$$V(t) = \frac{4}{25} h^2(t) \frac{\pi h(t)}{3}$$

$$V(t) = \frac{4}{75} h^3(t) \pi$$

$$\frac{m^3}{m^2} = m$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{75} \pi \cdot 3h^2(t) \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = 3 \frac{m}{min} \cdot \frac{25}{4\pi} \cdot \frac{1}{16} \leftarrow \frac{dV}{dt} = \frac{4}{25} \pi h^2(t) \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{m}{min}$$

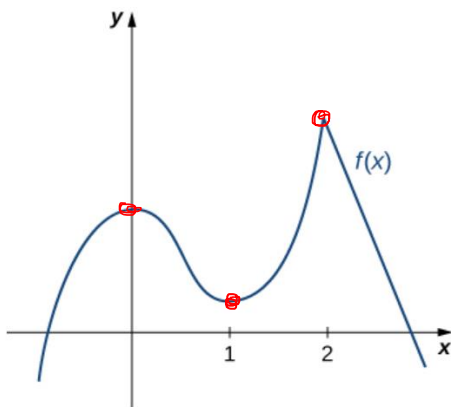
Extremvärden

Definition 1: Låt f vara en funktion och $c \in D_f$.

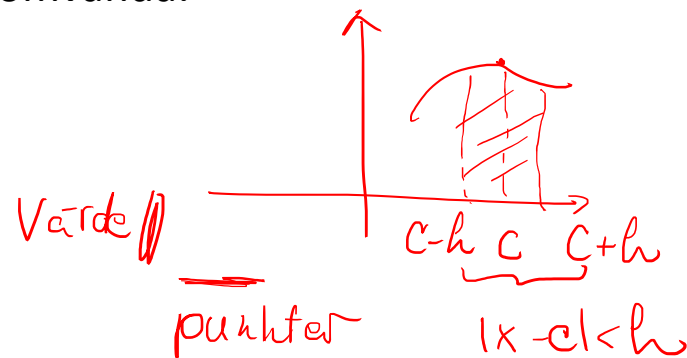
- a) c **global max punkt** om $\underline{f(x) \leq f(c)}$, $\forall x \in D_f$ $\forall$ alla
- b) c **lokal max punkt** om $\exists h > 0$ så att $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in D_f$ där $\underline{|x - c| < h}$ $\exists$ existerar
- c) c **global min punkt** om $f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in D_f$
- d) c **lokal min punkt** om $\exists h > 0$ så att $f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in D_f$ där $|x - c| < h$
- e) Motsvarande funktionsvärde $f(c)$ kallas för en global/lokal max/min **värde**
- f) Global/lokal max/min punkter/värden kallas med en gemensam ord för **extrempunkter** resp. **extremvärden**.

OBS! Varje globalt min/max är också lokalt min/max men inte det omvända.

Exempel 1:



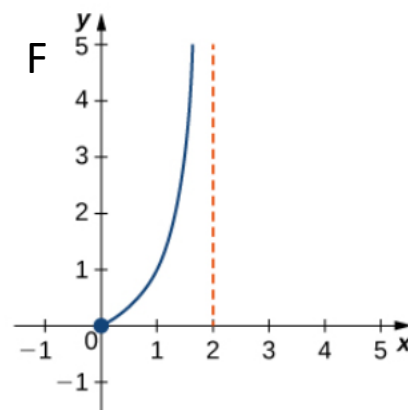
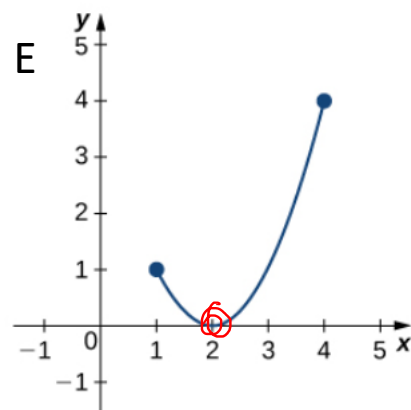
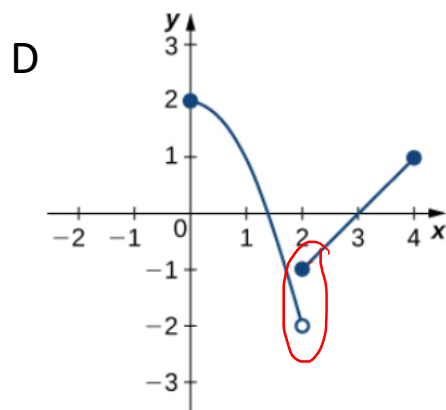
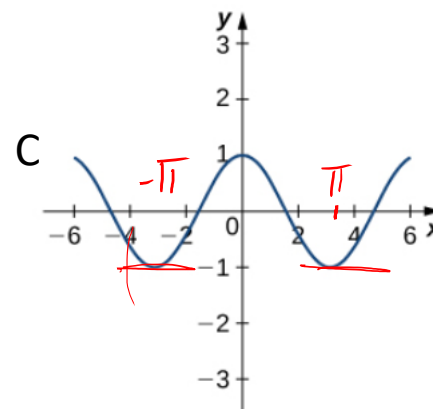
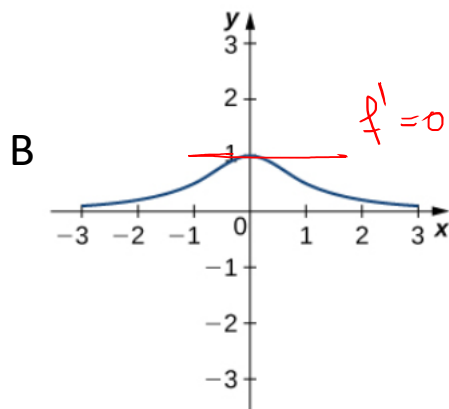
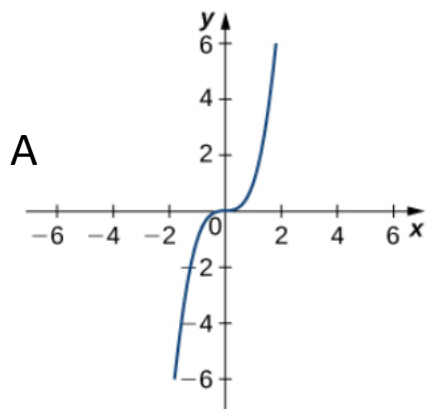
$c=1$, l. min
 $c=0$, l. max
 $c=2$, g. max
(l. max också)



Hur vet man om/var det finns extrempunkter?

Sats 1: Om f är definierad och **kontinuerlig** på ett **slutet intervall** $[a, b]$ så antar f ett största och ett minsta värde på $[a, b]$.

Exempel 2:



a) ej globalt max/min

b) g. max i 0

c) g. max, g. min

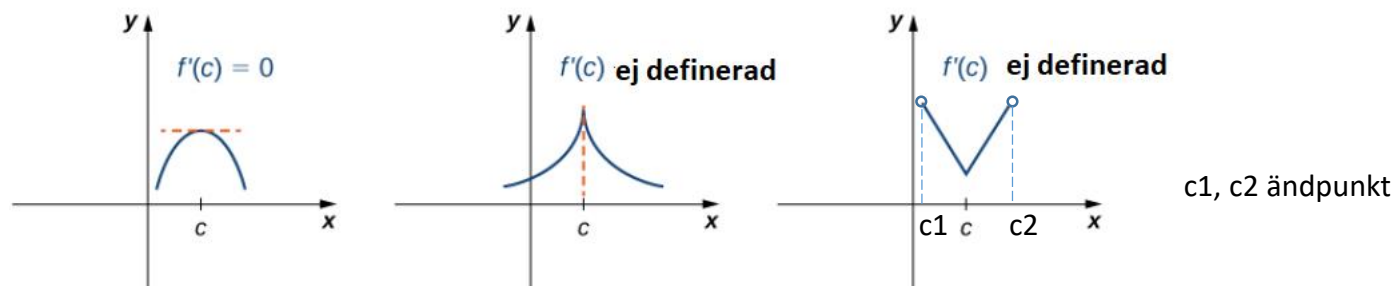
d) f g. kontinuerlig
g. max i 0

e) g. max i $x=4$
g. min i $x=2$
l. max i $x=1$

f) g. min i $x=0$

Hur kan man beräkna extrempunkter/extremvärden?

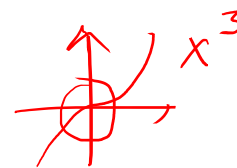
Det finns flera möjligheter om c är en extrempunkt:



Sats (Fermat): Om $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ har ett lokalt extremvärde i c och om $f'(c)$ existerar, så $f'(c) = 0$.

OBS! Satsen betyder inte att $f'(c) = 0 \Rightarrow c$ är lokalt min/max.

T.ex. $f(x) = x^3$ har inte extrempunkt i 0 även om $f'(0) = 0$.



Definition 2: Punkt c kallas för kritiskpunkt om $f'(c) = 0$ eller $f'(c)$ existerar inte.

Sats 3: Om f har en lokal max/min i c , så är c en kritiskpunkt.

Exempel 3: Bestäm alla kritiska punkter och extremvärden av $f(x) = |x - 1|$ på intervall $[-2, 2]$.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x \in [1, 2] \\ -x+1, & x \in [-2, 1) \end{cases}$$

① f kont., $[-2, 2]$ sluttet $\Rightarrow \exists$ min/max på $[-2, 2]$

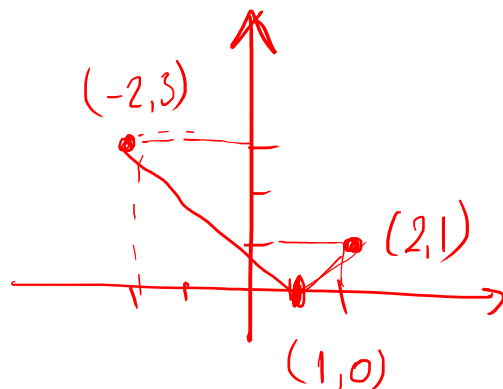
② $[1, 2] : f'(x) = 1 \Rightarrow$ inga kritiska punkter

$[-2, 1) : f'(x) = -1 \Rightarrow$ inga kritiskpunkter

③ $f(1) = |1-1| = 0$

$$f(2) = |2-1| = 1$$

$$f(-2) = |-2-1| = 3$$



$(1, 0)$ — g. min

$(2, 1)$ — l. max

$(-2, 3)$ — g. max

Exempel 4: Bestäm global min/max av $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ på $[-1/2, 4]$.