

Föreläsning 13

Medelvårdessatsen.
Växande och avtagande funktioner.

Medelvärdesatsen

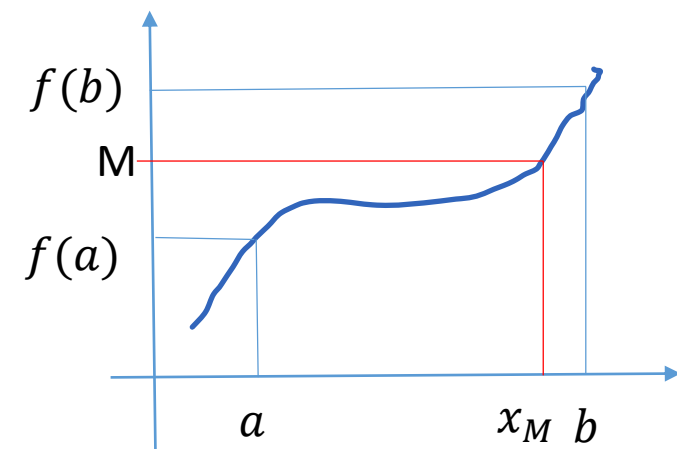
Rolles sats: Låt f vara en funktion och antag:

a) f är definierad och kontinuerlig på $[a, b]$,

b) f är deriverbar på (a, b) ,

c) $f(a) = f(b)$.

Då det finns $c \in (a, b)$ så att $f'(c) = 0$.



Bevis:

i. f är konstant $\Rightarrow f'(c) = 0, \forall c \in (a, b)$

ii. f är inte konstant och enligt Sats 1 (F12) har f max och min i $c \in (a, b)$. Enligt Fermat satsen är $f'(c) = 0$.

Exempel 1: Bevisa att ekvationen $x^3 + x - 1$ har endast en reell rot.

Bevis:

i. $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0 \Rightarrow \exists a \in (0, 1)$ så att $f(a) = 0$

ii. Vi måste bevisa att det finns endast ett a .

Antag att det finns a och b så att $f(a) = 0, f(b) = 0$. Enligt Rolles satsen det finns $c \in (a, b), f'(c) = 0 \dots \dots (\#)$.

Å andra sida, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ för alla x (och också för c) vilket är en motsägelsen till $(\#)$. Alltså är vårt påstående att det finns a och b så att $f(a) = 0, f(b) = 0$ falskt, vilket innebär att satsen är bevisad.

Satsen om mellanliggandevärden: Antag att $f(x)$ är definierad och kontinuerlig på $[a, b]$. Då antar $f(x)$ alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

Medelvärdesatsen: Antag att f är :

- a) definierad och kontinuerlig på $[a, b]$
- b) deriverbar på (a, b) .

Då det finns $c \in (a, b)$ så att $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bevis:

Den rätta linjen genom $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$ har ekvationen

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

$$(x=a \Rightarrow y=f(a), x=b \Rightarrow y=f(b))$$

Låt nu

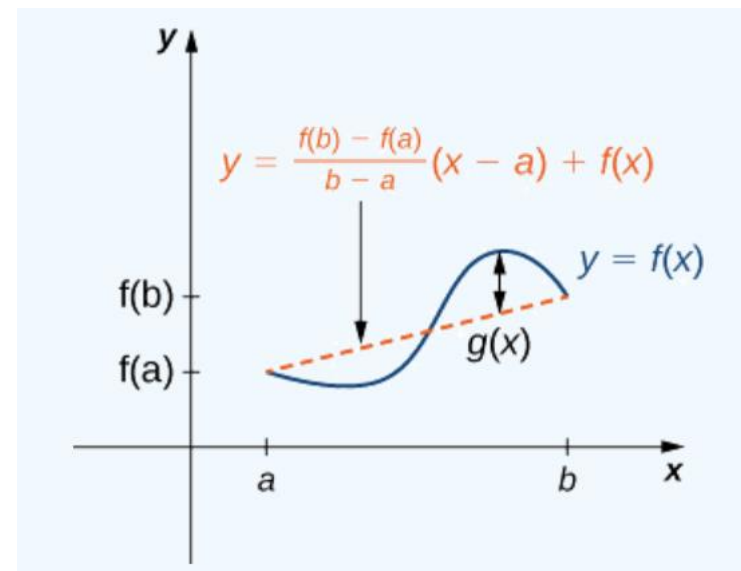
$$g(x) = f(x) - y = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a).$$

Det gäller att:

- g är definierad och kontinuerlig på $[a, b]$,
- deriverbar på (a, b) ,
- $g(a) = g(b) = 0$.

Enligt Rolles satsen det finns $c \in (a, b)$ så att $g'(c) = 0$ dvs. att

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$



Korollarium 1: Låt f vara en funktion och antag:

a) f är definerad och kontinuerlig på $[a, b]$,

b) f är deriverbar på (a, b) ,

c) $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$.

Det följer att $f(x) = \textit{konstant}, \forall x \in [a, b]$.

Bevis: Antag att det finns $t \in (a, b)$ så att $f(t) > f(a)$.

Funktionen f är definerad och kontinuerlig på $[a, t]$ och deriverbar på (a, t) . Enligt

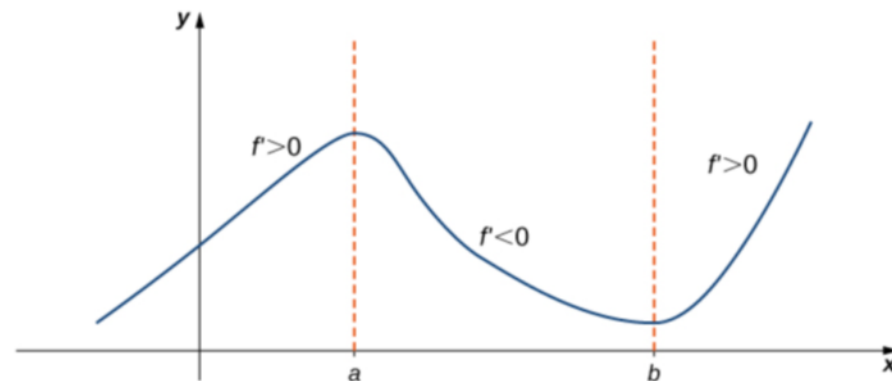
Medelvärdesatsen finns det $c \in (a, t)$ så att $f'(c) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$. Det gäller att $f'(c) > 0$.

Enligt (c) är $f'(x) = 0$, för alla x , inklusive c , vilket är en motsägelsen till $f'(c) > 0$.

Vårt påstående att $f(t) > f(a)$ är falskt och satsen är bevisad.

Kom ihåg:

1. f är **växande** på $[a,b]$ om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
2. f är **strängt växande** om det gäller att $f(x_1) < f(x_2)$.
3. f är **avtagande** om $x_1 < x_2$, så gäller $f(x_1) \geq f(x_2)$.
4. f är **strängt avtagande** om det gäller att $f(x_1) > f(x_2)$.



Korollarium 2: Låt f vara en funktion och antag:

- a) f är definierad och kontinuerlig på $[a, b]$,
- b) f är deriverbar på (a, b) .

Då gäller att:

1. $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ är växande
2. $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ är strängt växande
3. $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ är avtagande
4. $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ är strängt avtagande

Bevis: 1. Antag att $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ och att $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Vi kommer att bevisa att $f(x_1) \leq f(x_2)$.

f är kontinuerlig på $[x_1, x_2]$ och deriverbar på (x_1, x_2) och enligt MVS det finns $c \in (x_1, x_2)$ så att $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

$$x_2 - x_1 > 0, f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

Andra del 2-4 bevisas likadant.

Exempel 2: Visa att ekvationen $x^3 - 15x + c = 0$ har högst 1 lösning på $[-2, 2]$.

Lösning · $f(x) = x^3 - 15x + A$ kont, deriverbar på $\mathbb{R}$

① Antag att det finns två lösningar x_1 och $x_2 \dots$ (Δ)

$f(x_1) = f(x_2) = 0 \xRightarrow{\text{Rolles}} \exists c \in (x_1, x_2)$ så att

$$f'(c) = 3c^2 - 15 = 0$$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{5} \notin [-2, 2]$$

$\Rightarrow$ motsägelse till (Δ)

$\Rightarrow$ max en lösning

② $f(2) = -22 + A < 0$
 $f(-2) = 22 + A > 0$ om $A < 22$

$$\Rightarrow \exists a \in [-2, 2] : f(a) = 0$$

③ $A > 22$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\Rightarrow \exists a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) : f(a) = 0$$

Exempel 3: Bevisa identiteten $\arcsin \frac{x-1}{x+1} = 2 \arctan \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$.

Lösning: $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{x+1} - 2 \arctan \sqrt{x}$ def. på $[0, \infty)$
kont. deriverbar

$$\left(\arcsin \frac{x-1}{x+1} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2}} \cdot \frac{x+1 - x+1}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$$

$$(\arctan \sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Kor. } f(x) = \text{konstant}$$
$$f(0) = \arcsin(-1) - 2 \arctan 0 = -\frac{\pi}{2}$$

Exempel 4: Om f är kontinuerlig och deriverbar för alla x , $f(3)=5$, $f'(x)<2$, vad är största värde som $f(7)$ kan ha?

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(7)-f(3)}{7-3} \Leftrightarrow f(7) = 4f'(c) + f(3) \Rightarrow f(7) < 8 + 5 = 13$$