Föreläsning 11

Exponentiell tillväxt och avtagande.
Relaterade hastigheter.
Linjär approximation.

Exponentiell tillväxt och avtagande

En vanlig tillämpning av derivator är att lösa differentialekvationer (ODE:n): bestäm funktion $y(t)$ så att

$$y'(t) = ky(t), \qquad k \in R.$$

Vi ofta har begynnelsevärdes problem att lösa:

$$(*) \quad \begin{cases} \boldsymbol{y'(t) = ky(t), \quad k \in R} \\ \boldsymbol{y(0) = y_0} \end{cases}$$

dvs. vi vill hitta funktion y(t) som uppfyller differentialekvationen och begynnelse villkor.

Sats: (*) har lösning $y(t) = y_0 e^{kt}$.

Bevis: Antag att $y(t) = Ce^{kt}$ är lösning. Det följer att $y'(t) = Cke^{kt}$. Stoppa den i (*) :

$$\begin{cases} Cke^{kt} = Cke^{kt} \\ y(0) = y_0 = C \end{cases}$$

$t = 0, \quad e^{k \cdot 0} = 1$

$y(0) = C \cdot 1 = C$

Så, $C = y_0$ och lösningen är $y(t) = y_0 e^{kt}$

Exempel 1:

a) $\begin{cases} y'(t) = 0.3y(t), \quad k \in R \\ y(0) = 5 \end{cases}$

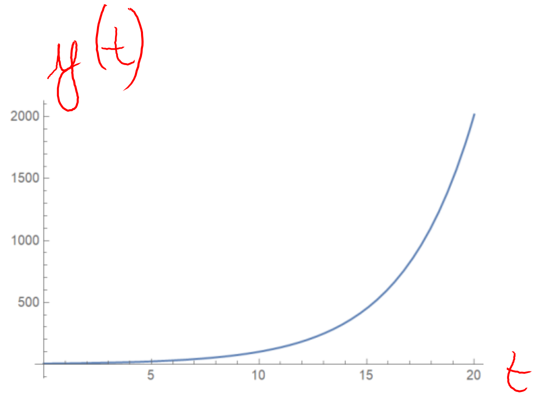
$y_0 = 5 \,, k = 0.3 \Rightarrow y(t) = 5e^{0.3t}$

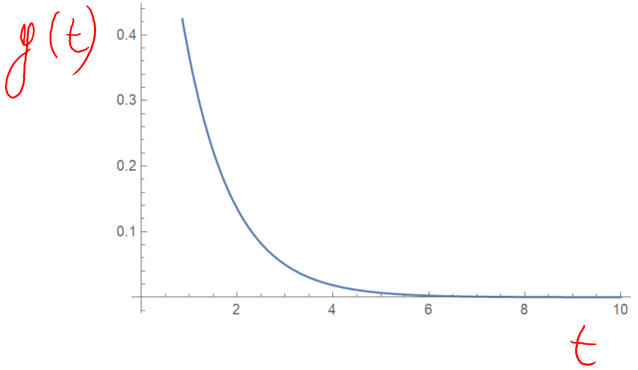
b) $\begin{cases} y'(t) = -y(t), \quad k \in R \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$y_0 = 1 \,, k = -1 \rightarrow y(t) = e^{-t}$

c) $\begin{cases} y'(t) = ky(t), \quad k \in R \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$y_0 = 0 \Rightarrow y(t) = 0e^{kt} = 0$





$y(t) = y_0 e^{kt}$

$k = 0, \quad y(t) = y_0 e^{0 \cdot t} = y_0$

Exempel 2 (Populationstillväxt, sida 237): $\frac{dP}{dt} = kP$

$t=0$: 1950 : 2560

$t=10$: 1960 : 3040

$t=100$ 2050 : ?

$$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow P(t) = P(0)e^{kt}$$

$$e^{kt} = \frac{P(t)}{P(0)} \quad / \ln$$

$$kt = \ln\frac{P(t)}{P(0)}$$

$$k = \frac{1}{t}\ln\frac{P(t)}{P(0)}$$

$P(0) = 2560$

$P(10) = 3040$

$t = 10$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3040}{2560}$$

$$\Rightarrow P(t) = 2560 \cdot e^{\left(\frac{1}{10}\ln\frac{3040}{2560}\right)t}$$

$$\Rightarrow P(100) = 2560\, e^{\left(\frac{1}{10}\ln\frac{3040}{2560}\right)\cdot 100}$$

Exempel 3 (Newtons avsvalningslag, sida 240):

$T(t)$, T_s $\quad T(t)-T_s$

$T(0)=T_0$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T(t)-T_s) \\ T(0)=T_0 \end{cases}$$

$y'(t)=k\,y(t)$

$22°$, $7°$, $1/2$ timme $\to 16°$

efter 1 timme, $T(1)=?$

$T(0)=22$, $T_s=7$

$T(\frac{1}{2})=16$

$T(1)=?$

$y(t)=T(t)-7$

$\frac{dy}{dt}=\frac{dT}{dt}$

$y(0)=T(0)-7=15$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(t)=k\,y(t) \\ y(0)=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T(t)-7) \\ T(0)=22 \end{cases}$$

$T(1)=$

$y(t)=15e^{kt} \Leftrightarrow$

$T(t)=15e^{kt}+7$

$T(\frac{1}{2})=15e^{k/2}+7=16$

$e^{k/2}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

$k/2=\ln\frac{3}{5} \Rightarrow k=2\ln\frac{3}{5}$

Relaterade hastigheter (exempel 4, sidan 247)

Linjär approximation

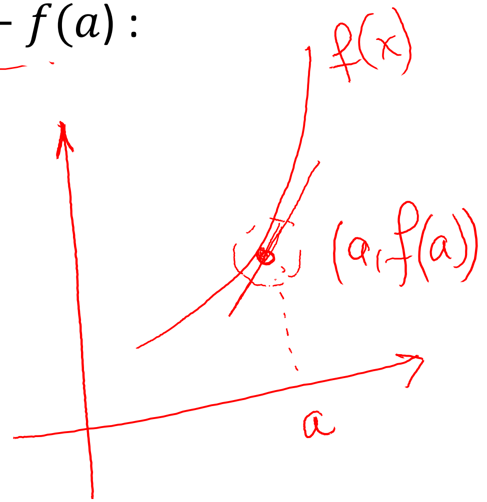
$f(x)$ funktion, $y(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ är ekvation av tangentlinjen till $f(x)$ i punkt $(a, f(a))$

$y(x) = 4(x-2) + 4 = 4x - 4$

Exempel 5: Hitta tangentlinjen till $f(x) = x^2$ i $a = 2$.

$f'(x) = 2x$, $f'(2) = 4$

Om man vill beräkna $f(x)$ för x nära a kan man approximera $f(x)$ med $f'(a)(x-a) + f(a)$:



2,001

$$f(2 + 0{,}001) = 2{,}001\text{^}2$$
$$f(2 + 0{,}001) = 4(2 + 0{,}001 - 2)$$

$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ kallas för linjär approximation av f i a

Sin

Exempel 6: Beräkna $\sin(\frac{\pi}{3} - 0{,}001)$ med linjär approximation.

$$L\left(\frac{\pi}{3} - 0{,}001\right) = \sin'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{3} - 0{,}001 - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} \cdot 0{,}001 + \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}001 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$