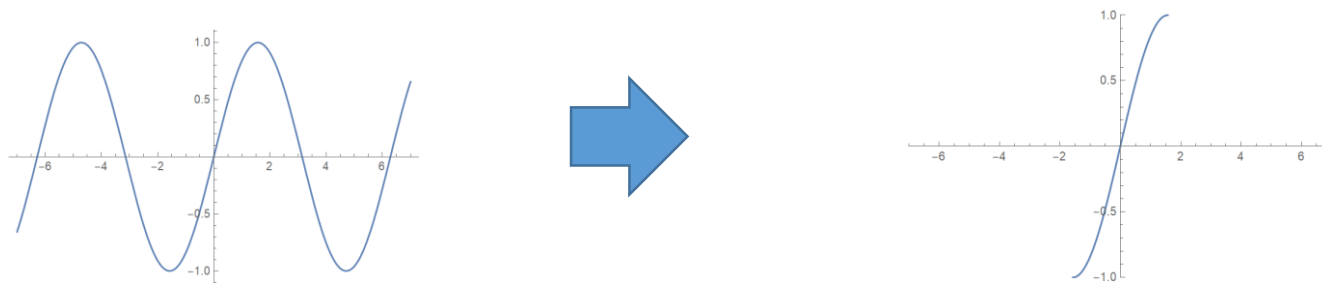


Föreläsning 10

Arcusfunktioner och deras derivator

Vi vill ha invers till $f(x)=\sin x$ men problem är att sin funktion är inte injektiv.

Lösning: att begränsa definitionsmängden.



$\sin x$ är injektiv på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin x$ är inverterbar på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$V_{\sin x} = [-1, 1]$ på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

Definition: arcsin betecknar invers till sin funktion på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dvs.

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

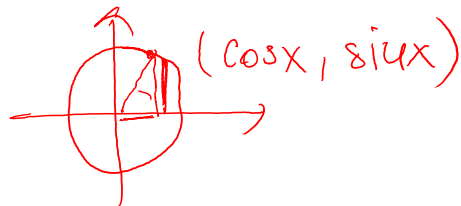
$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

för alla
 $\exists$

Exempel 1:

a) $\sin(\arcsin 1) = 1$



b) $\arcsin(\sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$x \in [-1, 1]$$

c) $\sin(\arcsin 2) =$ ej def. p.g.a. $2 \notin [-1, 1]$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

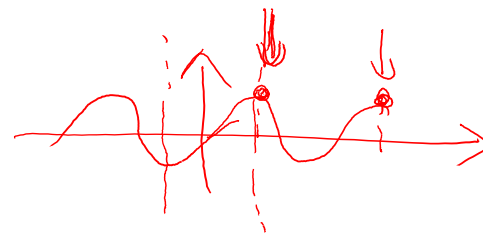
$$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

d) $\arcsin \frac{1}{2} =$

$$\sin \frac{\pi}{6} =$$

$$\sin \frac{\pi}{4} =$$

$$\sin \frac{\pi}{3} =$$



e) $\arcsin(\sin \frac{3\pi}{2}) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

f) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$



$$x = \sin \theta$$

$$\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$$

$$\theta = \arcsin x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\arcsin x) = x \\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$$

Sats: Om f^{-1} är inversen till f så gäller att

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Bevis: $f \circ f^{-1}(x) = x$ derivera båda sidor + kedjeregeln

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Sats: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Bevis: $(\arcsin x)' = (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Vi vill ha invers till $\cos$ funktion med det är inte injektive på $\mathbb{R}$.

Lösning: begränsa intervallet till $[0, \pi]$

$$\underline{\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]}$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

Vad är $(\arccos x)'$?

$$(\arccos x)' = 0 - (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exempel:

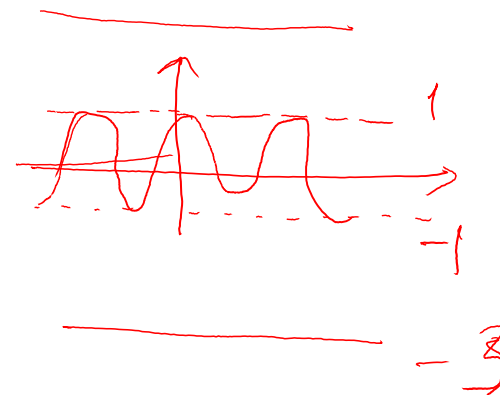
$$a) \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$b) \cos(\arccos(-3)) = \text{ej def.}$$

$$c) \arccos(\cos(-\frac{\pi}{4})) = \arccos(\cos \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

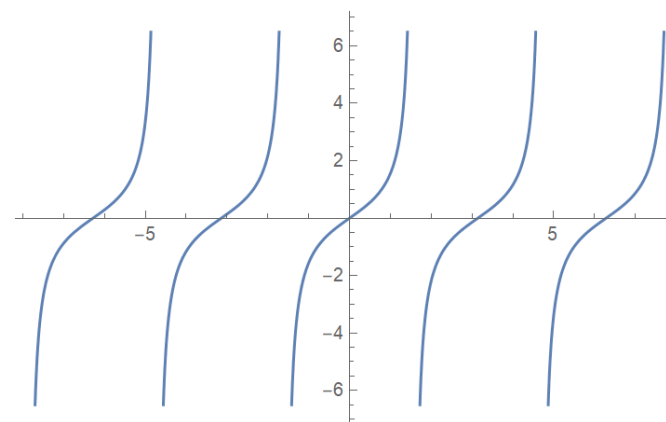
jämn

$$\cos \alpha = -3, \alpha = ?$$



tan är inte injektiv!

Begränsa $D_{\tan}$



$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\tan(\arctan x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan x) = x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Sats: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Sats 1

$$(\arctan x)' = (\tan^{-1} x)' \stackrel{\text{Sats 1}}{=} \frac{1}{\tan'(\arctan x)} =$$

Sats 1

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = 1 + (\tan x)^2 \longrightarrow = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} =$$