

MVE535 Föreläsning 6

Kontinuitet

Formell definition av gränsvärde

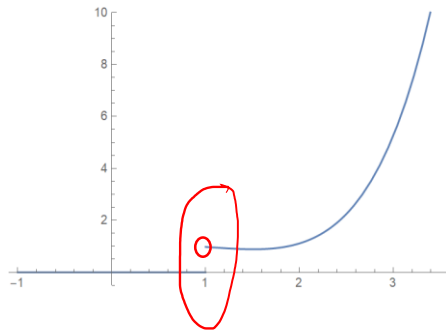
Kontinuitet

Definition 1: En funktion $f(x)$ är kontinuerlig i $a \in D_f$ om $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

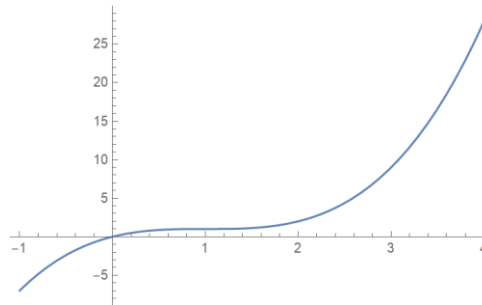
OBS! $f(x)$ är kontinuerlig i a om tre följande villkor gäller:

1. $a \in D_f$
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existerar
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

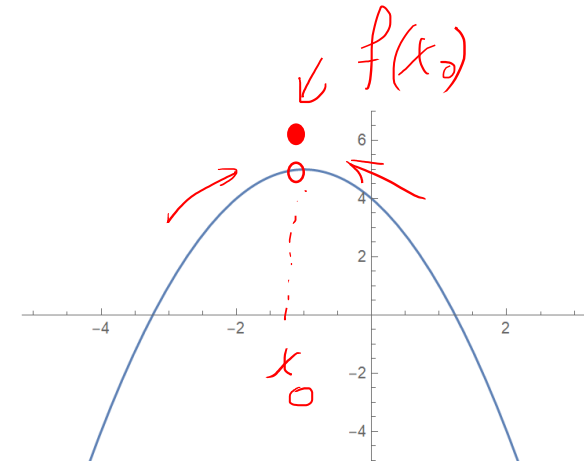
Exempel 1:



ej kontinuerlig eftersom
gränsvärde i a existerar inte
(det finns höger- och
vänstergränsvärde!)



kontinuerlig



ej kontinuerlig eftersom
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

Exempel 2: I vilken punkt är $f(x)$ inte kontinuerlig?

a) $f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x - 5}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$
 $x \neq 5, f(x) = x + 4$

$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$
 $f(5) =$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 20}{x - 5} & \text{om } x \neq 5 \\ 1 & \text{om } x = 5 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{om } x \neq 0 \\ 6 & \text{om } x = 0 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$

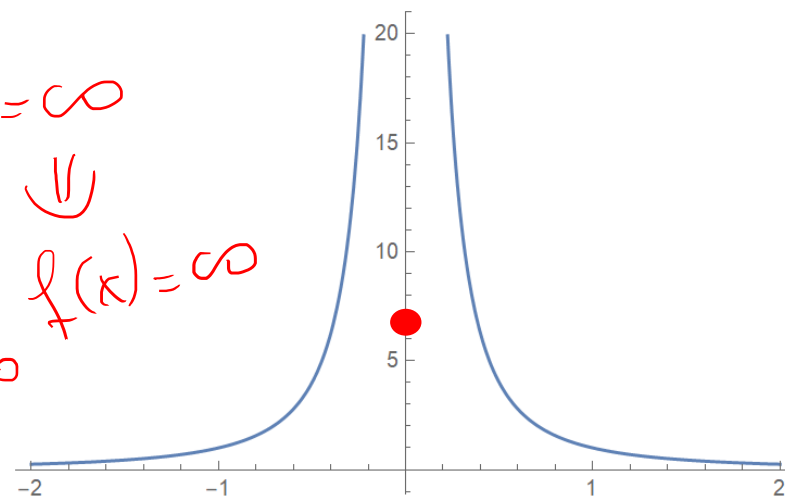
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$

$f(0) = 6 \neq$

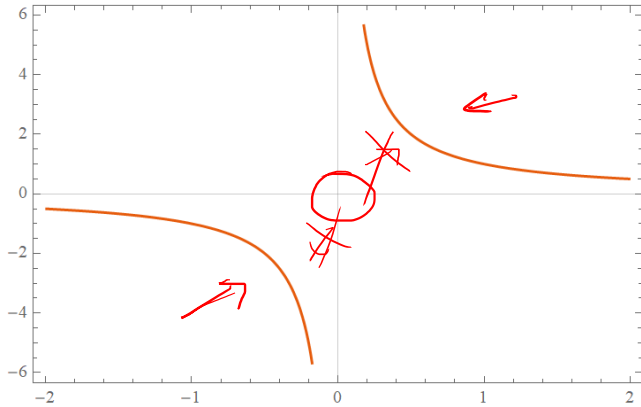
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ kont.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Exempel 3: Är funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinuerlig?



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$0 \notin D_f$$

f är kontinuerlig

$$D_f = I_1 \cup I_2$$

$$a \in D_f$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ \text{?} & , x = 0 \end{cases}$$

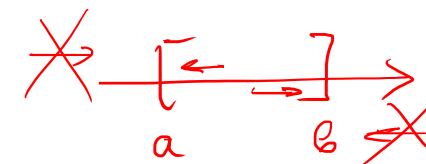
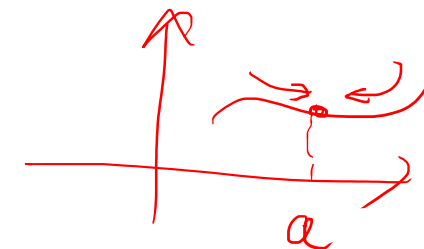
inte kont.
 $D_f = \mathbb{R}$

Jämför med Exempel 2c!

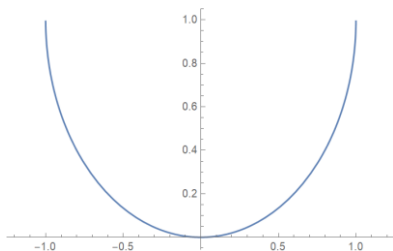
OBS! Intuitivt definition innebär att funktionen är kontinuerlig i a om det inte finns något hopp i a . Vi kan skissa grafen utan att lyfta pennen från pappret. Intuitivt definition också förutsätta att D_f är ett intervall och det ger inget svar på vad som händer om D_f består av två eller flera intervall.

Definition 2:

- $f(x)$ är högerkontinuerlig i a om $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$
- $f(x)$ är vänsterkontinuerlig i a om $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$
- $f(x)$ är kontinuerlig i intervall $[a, b]$ om den är kontinuerlig i alla punkter i intervallet, högerkontinuerlig i a och vänsterkontinuerlig i b .



Exempel 4: Visa att $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ är kontinuerlig i intervall $[-1, 1]$.



$$-1 < x < 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 - \sqrt{1 - x^2}) = 1 - \lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{1 - x^2}) = 1 - \sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow a} x^2} = 1 - \sqrt{1 - a^2} = f(a)$$

$$x = -1, x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1, f(1) = 1$$

$D_f = ?$

Kolla upp Exempel 2a igen! f är kontinuerlig.

Sats: Antag att f och g är kontinuerliga funktioner och $c \in \mathbb{R}$. Följande funktioner är också kontinuerliga:

cf	$f + g$	$f - g$
fg	$\frac{f}{g}, g \neq 0$	$f \circ g$

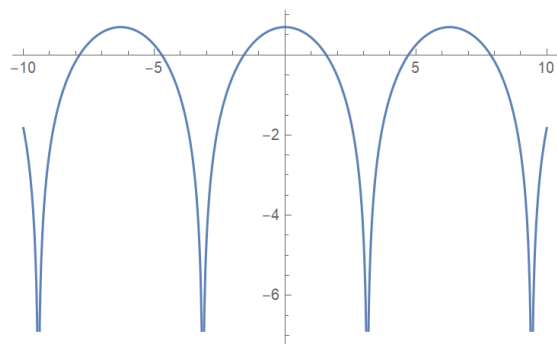
Sats: Följande klasser av funktioner är kontinuerliga där de är definierade:

Polynom	Rationella funktioner	Trigonometriska funktioner
Exponentialfunktioner	Logaritmfunktioner	Absolutbelopp

Exempel 5: I vilket intervall är kontinuerlig?

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

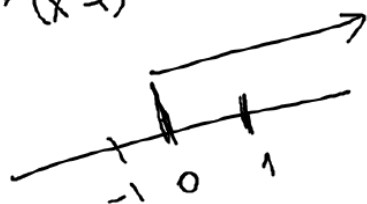
b) $f(x) = \ln(1 + \cos x)$



$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

$$D_{(\ln)} = (0, \infty)$$

$$D_{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$



$$(0, 1) \cup (1, \infty)$$

$$(0, \infty) \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \ln(\underbrace{1 + \cos x}_{> 0})$$

$$1 + \cos x > 0$$

$$\cos x > -1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \pi, 3\pi, 5\pi, \dots \\ -\pi, -3\pi, -5\pi, \dots \end{array} \right.$$

$$\{x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{array}{l} \cos 0 = 1 \\ \cos \pi = -1 \\ \cos 2\pi = 1 \\ \cos 3\pi = -1 \end{array}$$

Satsen om mellanliggande värden: Antag att $f(x)$ är definierade och kontinuerlig på $[a, b]$. Då antar $f(x)$ alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

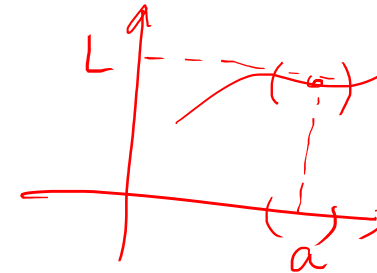
Exempel 6: Visa att en rot till ekvation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ ligger i mellan 1 och 2.

$$f(1) = -1, f(2) = 12 \Rightarrow \text{det finns } x \in (1,2) \text{ så att } f(x) = 0$$

Formell definition av gränsvärde (svårt!)

Antag att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Detta innebär att vi få avståndet mellan $f(x)$ och L hur litet som helst genom att låta x komma tillräckligt nära till a .

- Avstånd mellan $f(x)$ och $L = |f(x) - L|$
- Avstånd mellan x och $a = |x - a|$



Vi kan likna med en tävling mellan två deltagare, A och B.

1. A börjar med att bestämma max värde av $|f(x) - L|$, men $|f(x) - L|$ kan inte vara noll
2. B kontrollerar x och får bestämma max värde $|x - a|$
3. Om B alltid lyckas uppfylla A:s krav, gäller $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, annars inte

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Exempel 7: $f(x) = 2x + 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

1. A börjar och väljer $|f(x) - 3| < 10^{-5}$
2. B funderar: $|f(x) - 3| = |2x + 1 - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1|$

Om B väljer $|x - 1| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, det följer att:

$$|f(x) - 3| = 2|x - 1| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} = 10^{-5} \text{ och A:s krav är uppfyllt dvs. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

Mer precis: om oavsett hur litet värde $|f(x) - L|$ vi väljer, så kan vi tvinga fram det genom att göra $|x - a|$ tillräckligt litet (men > 0), säger vi att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Ännu mer precis betyder $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ att: oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer, kan vi tvinga fram $|f(x) - L| < \varepsilon$ genom att låta $0 < |x - a| < \delta$ för någon δ .

Matematisk: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ om och endast om det för alla tal $\varepsilon > 0$ existerar någon tal $\delta > 0$ sådant att om $0 < |x - a| < \delta$ så medför detta att $|f(x) - L| < \varepsilon$.

