

MVE535 Föreläsning 7

Derivatans definition. Tangenter

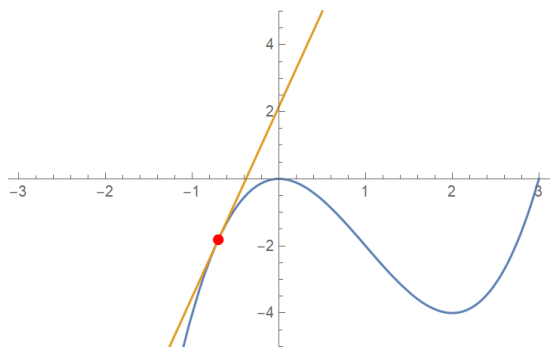
Definition 1: En funktion $f(x)$ sägs vara deriverbar i en punkt $a \in D_f$ om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (*)$$

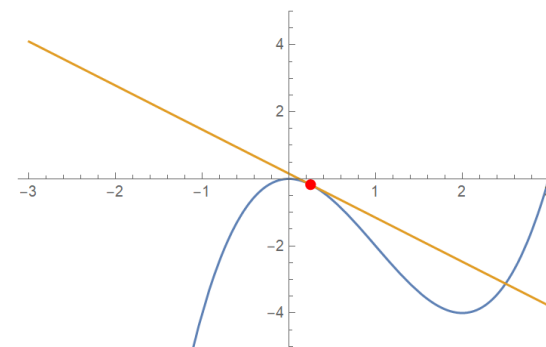
existerar. (*) betecknas med

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = Df(a).$$

Geometriskt betecknar (*) lutningen av $f(x)$ i $x = a$.



Om $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
dvs lutning från en sida är samma som
lutning från andra sidan, det finns EN
tangent i punkt a och vi säger att $f(x)$ är
deriverbar i punkt a .



Exempel 1: Använd (*) för att beräkna derivatan av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Vad är D_f ?
Beräkna $f'(2)$.

$$\begin{aligned}\text{Lösning: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$D_f = [0, \infty)$$

$$D_{f'} = (0, \infty)$$

$$\left| = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = \frac{1}{x} \right|$$

"e"

Exempel 2*: Använd (*) för att beräkna derivatan av funktionen $f(x) = \ln x$. Vad är D_f ?
Beräkna $f'(e)$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right) \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h} = \left. \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h} \right|_{h \rightarrow 0, t \rightarrow 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{1/xt} = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{1/t} = \frac{1}{x} \cdot e\end{aligned}$$

Sats 1: Om funktionen f är deriverbar i punkt $a \in D_f$, så är f kontinuerlig i a .

OBS! Det finns kontinuerliga funktioner som är inte deriverbara.

Exempel 3: Är funktion $f(x) = |x|$ deriverbar?

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

} f kont. i 0

$$x > 0: f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

$$x < 0: f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x-h - (-x)}{h} = -1$$

① ej kont.

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \neq \lim_{x \rightarrow a^-}$$

$$\textcircled{3} = \lim_{x \rightarrow a} = \infty$$

Definition 2: Antag att kurvan är en graf av en funktion $y = f(x)$. En tangent i punkt $P(a, f(a))$ är en rät linje med lutningen

$$k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$y = \underline{k}x + \underline{m}$$

om gränsvärdet existerar.

Exempel 4: Vad är tangent till funktion $y = x^2$ i punkt $P(1,1)$?

Exempel 5*: Vad är tangent till funktion $y = x^{-2}$ i punkt $P(1,1)$?

Exempel 6:** Vad är tangent till funktion $y = \sin x$ i punkt $P(0,0)$?

$$y = \underline{k}x + \underline{m}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

$$y = 2x + m \rightarrow 1 = 2 \cdot 1 + m \Leftrightarrow m = -1$$

$$\Rightarrow y = 2x - 1$$

tangent i $(1,1)$