MVE535 Föreläsning 8

Derivator av potens- och exponentialfunktioner.
Deriveringsregler.

Exempel 1: Visa att funktion $f(x) = 2e^x + 3x + 5x^3$ har ingen tangent med lutningen 2.

$$k = f'(x) = 2e^x + 3 + 15x^2 = 2$$

$$\underbrace{2e^x}_{>0} + \underbrace{15x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-1}_{<0}$$

Exempel 2: I vilken punkt har $y = e^x$ tangent parallell med linje $y = 2x$?

$y = k_1 x + m_1$

$y = k_2 x + m_2$

$k_1 = k_2$

$k_1 = 2 \Leftarrow k_2 = 2$

$k_1 = e^x = 2$

$x = \ln 2, \quad y = e^{\ln 2} = 2 \Rightarrow (\ln 2, 2)$

Produkt- och kvotregeln

Sats: Antag att f och g är deriverbara i $a \in D_f \cap D_g$. Då gäller att:

1. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)\,g'(x)$

2. $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$

3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)'g(x)}{(g(x))^2}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

OBS!
$(fg)' \neq f'g'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{f'}{g'}$

Bevis: 1. $(fg)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x))}{h}\underbrace{g(x+h)}_{g \text{ kont.} \to g(x)} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

f' $\qquad$ g'

$$2.\ \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)f(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-(f(x+h)-f(x))}{h\,f(x+h)f(x)} = -\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'}\cdot\frac{1}{f(x+h)f(x)}$$

f kont. $\Rightarrow f(x+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$

$$= -f'(x)\cdot\frac{1}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$3.\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' \overset{①}{=} f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)'$$

$$\overset{②}{=} \frac{f'}{g} + f\left(\frac{-g'}{g^2}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{a}{b\cdot c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}$$

Exempel 3: Beräkna derivatan till:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)$$

a) $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ f g

b) $f(x) = (x^3+1)e^x$

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x}$

a) $\left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)' = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$

b) $\left(\underline{(x^3+1)}\,\underline{e^x}\right)' = (x^3+1)'e^x + (x^3+1)e^x = 3x^2e^x + (x^3+1)e^x = (3x^2+x^3+1)e^x$

c) $\frac{x^2+1}{x^3+x} = \frac{\cancel{(x^2+1)}\cdot 1}{x\cancel{(x^2+1)}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Kedjeregeln

Sats: Antag att g är deriverbar i x och f är deriverbar i g(x). Då är $f \circ g$ deriverbar i x och
$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$.

Exempel 4: Beräkna derivatan till

1. $f(x) = e^{-x^2-x}$

$$f'(x) = e^{-x^2-x} \cdot (-2x-1) = -(2x+1)e^{-x^2-x}$$

2. $\sqrt[3]{1+x^3}$

$$\left((1+x^3)^{1/3}\right)' = \frac{1}{\cancel{3}}(1+x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot \cancel{3}x^2 = x^2(1+x^3)^{-2/3} = \frac{x^2}{(1+x^3)^{2/3}} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$$

Exempel 4*: Beräkna derivatan till

1. $f(x) = e^{-x^2-x}(2x+1)^2$
2. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x^3+1}}$

Exempel 5: Beräkna derivatan till

1. $f(x) = 2^{x^2}3^{x^2}$
2. $f(x) = x^x$

$f(x) = a^x$

$f'(x) = \underline{a^x \cdot \ln a}$

1. $2^{x^2}3^{x^2} = 6^{x^2}$

$(6^{x^2})' = 6^{x^2}\ln 6 \cdot 2x = \underline{2x\ln 6} \cdot 6^{x^2}$

2. $\boxed{x^x} = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$

$(e^{x\ln x})' = e^{x\ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$