

MVE535 Föreläsning 9

Implicit derivering.
Trigonometriska funktioner

Implicit derivering

$$y = f(x)$$


Antag att vi vill bestämma tangentlinjen till en cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ i punkt $P(a, b)$ som ligger på cirkeln. Problemet här är att vi kan inte hitta k på vanligt sätt dvs. vi kan inte derivera cirkelns ekvation eftersom det är inte en funktion (kom ihåg vertikal linje test). Vi kan använda **implicit derivering**:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(r^2) \quad \text{/här antag vi att } \underline{y = y(x)}$$

$$\underbrace{2x} + \underbrace{2y}_{\text{derivera}} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = \frac{-x}{y} \quad \text{då } y \neq 0$$

Om punkt är $(1, \sqrt{3})$ har vi att $k = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ och $y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x + m$.

$$(1, \sqrt{3}): \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} + m \quad \text{och } m = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ dvs. } y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Exempel 1: Bestäm y' om $x^2 + 2x - xy = x^3$.

Exempel 2*: $e^{2x+3y} = x^2 - \ln xy^3$

Exempel 3: Bestäm tangent i punkt (0,-1) till kurvan $x^5 - y^5 + x - y = 2$.

$$1. \quad 2x + 2 - y - xy' = 3x^2$$

$$-xy' = 3x^2 - 2x + 2 + y$$

$$y' = -3x + 2 + \frac{2}{x} - \frac{y}{x}$$

$$(xy)' = x'y + xy' = y + xy'$$

$$2. \quad e^{2x+3y} \cdot (2 + 3y') = 2x - \frac{1}{xy^3} \cdot (y^3 + x \cdot 3y^2 y')$$

$$e^{2x+3y} \cdot (2 + 3y') = 2x - \frac{1}{x} - \frac{3}{y} y'$$

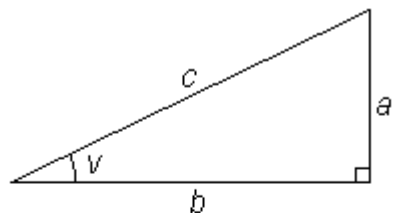
$$2e^{2x+3y} + 3y' e^{2x+3y} = 2x - \frac{1}{x} - \frac{3}{y} y'$$

$$3y' e^{2x+3y} + \frac{3}{y} y' = 2x - \frac{1}{x} - 2e^{2x+3y}$$

$$(3e^{2x+3y} + \frac{3}{y}) \cdot y' = 2x - \frac{1}{x} - 2e^{2x+3y}$$

$$y' = \frac{2x - \frac{1}{x} - 2e^{2x+3y}}{3e^{2x+3y} + \frac{3}{y}}$$

Grundläggande trigoneometri



$$\sin v = \frac{a}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}}$$

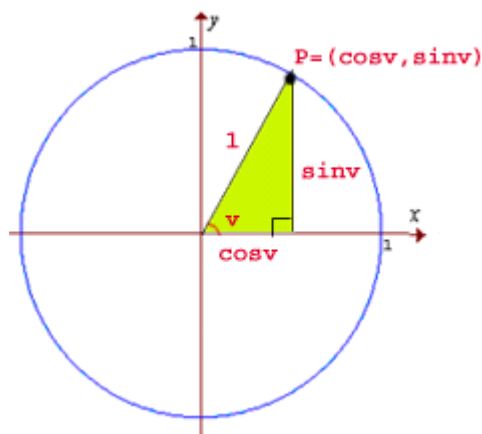
$$\cos v = \frac{b}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$$

$$\tan v = \frac{a}{b} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$$

$$\cot v = \frac{b}{a} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{motstående katet}}$$

Två olika sätt att prata om vinklar:

- 1 varv = 360 grader
- 1 varv = 2π radianer



Viktiga indentiteter

1. $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$
2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
3. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
4. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

Exempel 1: Bevisa att:

$$a) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$b) \cos(\pi - x) = -\cos x, \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$c) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$d) \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \underline{\cos^2 x} - \underline{1} = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$a) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \cos x + \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \sin x = \sin x$$

$$c) \sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} d) \cos 2x &= \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}_{1 - \cos^2 x} = \\ &= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

Sats: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\frac{0}{0}$$

Exempel 2: Beräkna

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\frac{2x}{2x}} = \frac{3}{2}$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 1

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin x \cos x}{x} \rightarrow 1 = 2$

$\downarrow$
 1

Lemma (hjälpsats): $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Beweis: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2(\frac{x}{2}) - 1}{\frac{2x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

↓

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$x = 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\frac{x}{2} \rightarrow 0$$

$$\sin \frac{x}{2} \rightarrow 0$$

Sats:

1. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

2. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

3. $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &\quad \quad \quad \downarrow 0 \quad \quad \quad \downarrow 1 \\ &= \cos x \cdot 1 = \cos x \end{aligned}$$