

MVE535 Föreläsning 5

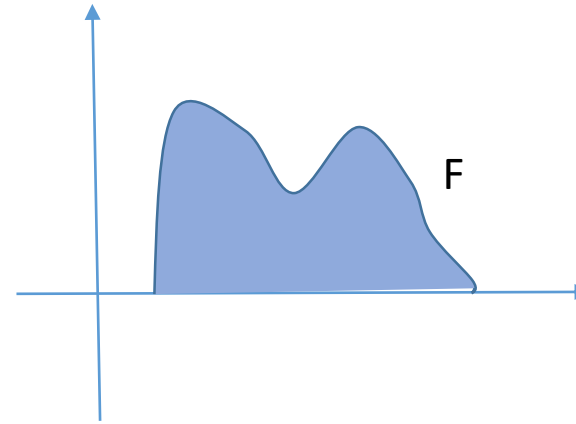
Gränsvärden - definition och räkneregler

Motivering

Avsnitt 2.1 och början av 2.2 - motiveringen varför gränsvärder är intressanta (tangenter, hastigheter)

Vi har en annan motivering – att fundera om vad folk ville och vill förstå

- Vad är summan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$?
- Hur mycket är $0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$?
- Vad är arean av figur F?
- Hur fungerar hastighetsmätare i bilen?
- Zenons paradoxer (kolla upp på Wikipedia)
summan av de oändligt antalet delar blir en ändligt stor helhet



Syfte med matematisk analys: att beräkna uttryck som inte kan beräknas med hjälp av algebra, men som måste approximeras först med algebraiska uttryck och sedan beräknas genom att ta gränser.

Exempel 1: Vad är värde av $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ när x närmar sig 3?

$$x \rightarrow 3, f(x) = \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = x+3 \rightarrow 6$$

$$x \rightarrow 3$$

$$x = 2,999, f(x) =$$

$$x = 3,001, f(x) =$$

$$f(x) \rightarrow 6$$

$$\text{när } x \rightarrow 3$$

$$D_f =$$

Exempel 2: Vad är konceptuellt skillnaden mellan $h = 0$ och $h \rightarrow 0$?

e – elefant, m – myra, $d = e - m$

Då har vi

$$e(e - m) = (m + d)(e - m)$$

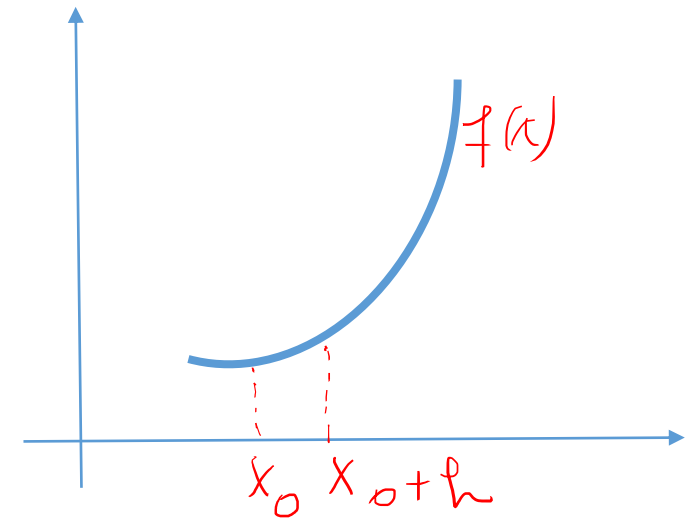
$$e^2 - em = em + \boxed{ed} - m^2 - md$$

$$e^2 - em - ed = em - m^2 - md$$

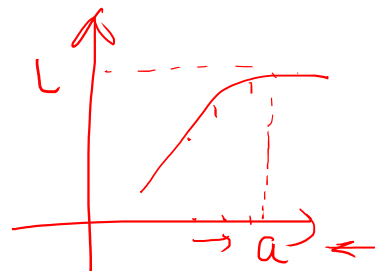
$$e(e - \cancel{m} - d) = m(e - \cancel{m} - d)$$

Om man tillåter division med noll kan man bevisa att elefant och myra har samma vikten! Men det är meningslöst.

$$\text{Lutning} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



Intuitivt definition av gränsvärde: Låt $f(x)$ vara definerad nära a . Vi skriver $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ om $f(x)$ är oändligt nära L när x är oändligt nära a .



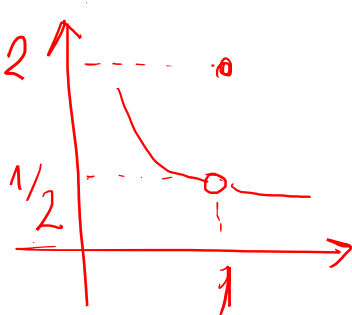
Exempel 3:

- $f(x) = \frac{x^2-2}{x^3+x+1}, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{3}$

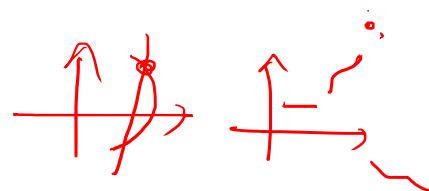
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2}{x^3+x+1} = \frac{1^2-2}{1^3+1+1} = -\frac{1}{3}$$

- $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{om } x \neq 1 \\ 2 & \text{om } x = 1 \end{cases}, \text{ då } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \frac{1}{2}$

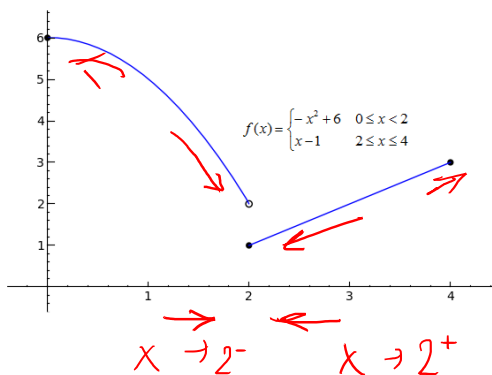
$f(x), x \neq 1$



$$h(x) = \begin{cases} x & \text{om } x \in (1, 2) \\ 5 & \text{om } x = 2 \\ e^x & \text{om } x > 2 \end{cases}$$



Höger- och vänstergränsvärdet



$$\begin{aligned} x \rightarrow 2^- & \text{ då } f(x) \rightarrow 2 \\ x \rightarrow 2^+ & \text{ då } f(x) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

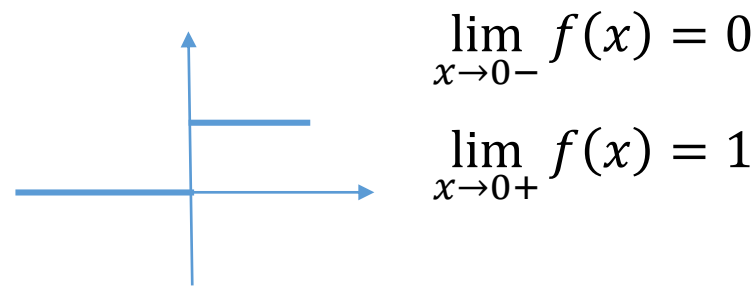
$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ finns inte!

Sats: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Om $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existerar inte $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Exempel 4: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ?$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existerar inte

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$
 ~~$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 1$~~
 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Horisontella asymptoter

Om en funktion $f(x)$ har gränsvärdet A då x går mot oändligheten så kommer grafen av $f(x)$ att närma sig linjen $y = A$. Linjen $y = A$ är en horisontell asymptot till $f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \dots \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{2x^2 + 3x + 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^2(2 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{2 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Oändligheten som gränsvärde, vertikala asymptoter

$$x \rightarrow a, f(x) \rightarrow \infty \text{ eller } f(x) \rightarrow -\infty$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$$

$$x^2 + 2x - 8 \neq 0$$

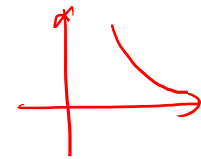
p_2 regel

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) =$$

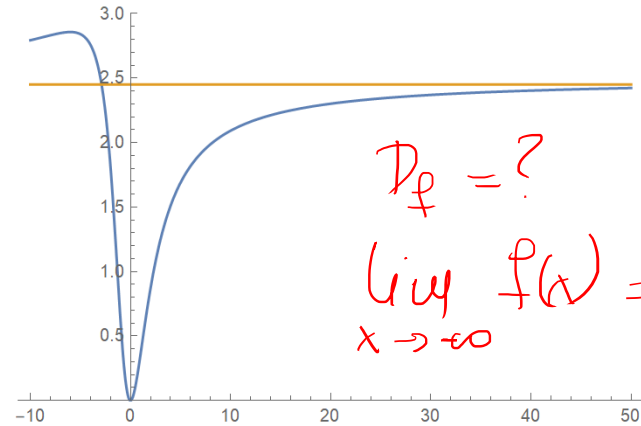
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$



$$\frac{M}{x} \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow \infty$$

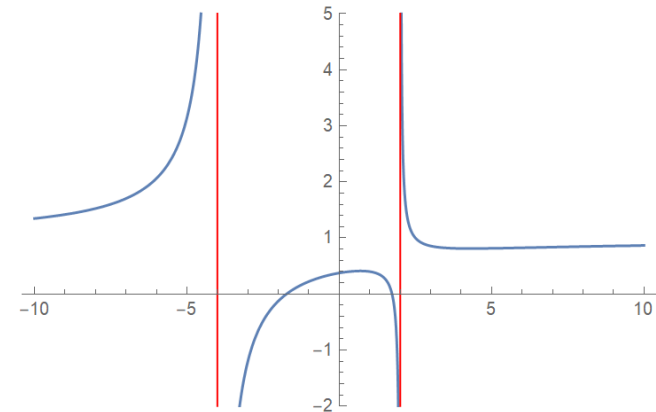
$$f(x) = \frac{5x^2}{2x^2 + 3x + 9}$$



$$D_f = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ?$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$$



Räknereregler för gränsvärden

Anta $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_f$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_g$.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL_f,$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_f + L_g,$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L_f - L_g,$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L_f L_g,$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_f}{L_g}, \quad L_g \neq 0,$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)^p = L_f^p, \quad L_f \neq 0 \text{ om } p < 0.$$

Exempel 5:

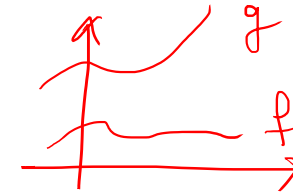
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{5}{8}$

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(x+1)} = \frac{4}{3}$

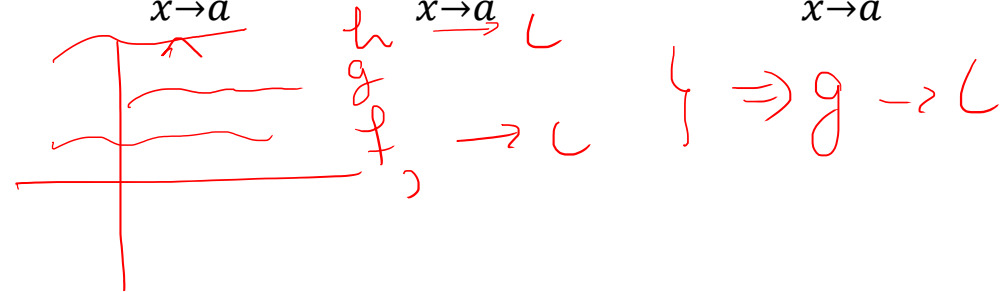
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x+8}-9}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{6}$

- $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{x(x-1)} \right) = -\infty$

Sats: Om $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$



Instängningsregeln: Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ och $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, då $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.



Exempel 6: Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$

Viktigt att veta: det finns inte $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$. Det menar att vi kan inte dela gränsvärdet övan i två delar, beräkna och multiplicera. Lösning $\Leftarrow$ involverar Instängningsregeln.

Obs!

$1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ för alla x . Vi multiplicerar alla termer med x^2 :

$$-1x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq 1x^2$$

$f(x) = -x^2, h(x) = x^2, g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ och vi kan beräkna lim enligt regeln: $\lim f(x)=0, \lim h(x)=0$ och $\lim g(x)=0$