

Föreläsning 14

Konvexitet och konkavitet

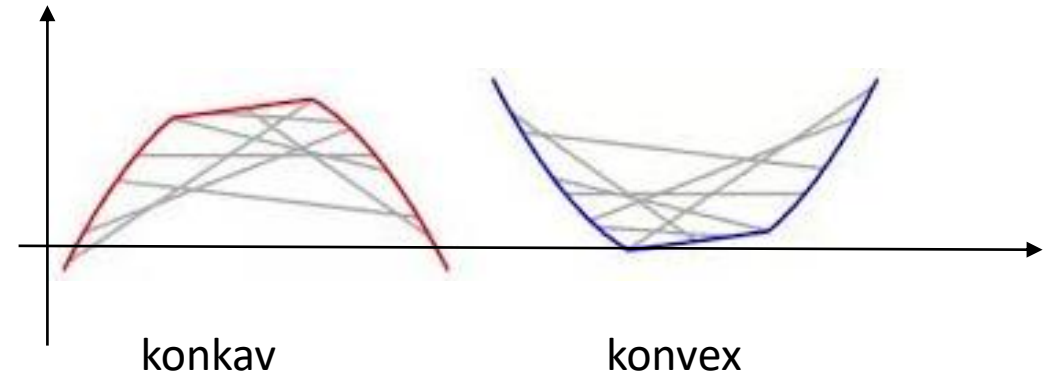
l'Hopitals regel.

Konvexitet och konkavitet

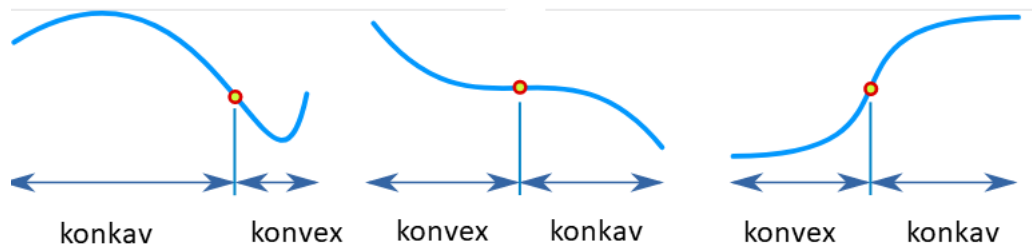
Definition 1: Låt f vara en funktion definierade på intervall $[a,b]$.

Vi säger att

1. Funktion är **konvex** på $[a,b]$ om för $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ det gäller att den räta linjen mellan $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ ligger överför eller på grafen till f .
2. Funktion är **konkav** på $[a,b]$ om för $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ det gäller att den räta linjen mellan $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ ligger under eller på grafen till f .



Definition 2: Om $c \in D_f$ så att f är konvex på en sida av c och konkav på andra sidan, säger vi att c är en **inflektionspunkt**.



Obs! Alla punkter på en rät linje är inflektionspunkter.

Sats 1: Atag att funktion f är två gånger deriverbar på (a, b) . Då gäller att:

1. Om $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, så är f konvex på (a, b) .
2. Om $f''(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, så är f konkav på (a, b) .
3. Om c är en inflektionspunkt, så är $f''(c) = 0$.

Exempel 1: Avgör på vilka interval är funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$ konvex och konkav och bestäm ev. inflektionspunkter.

$$f'(x) = \frac{x^2+3-2x \cdot x}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+3)^2 - 2(x^2+3) \cdot 2x \cdot (3-x^2)}{(x^2+3)^4} = \frac{-2x(x^2+3)(x^2+3+2(3-x^2))}{(x^2+3)^4} =$$

$$= \frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+3)^3} = \frac{-2x(3-x)(3+x)}{(x^2+3)^3}$$

$$f \text{ konkav: } (-\infty, -3) \cup (0, 3)$$

$$f \text{ konvex: } (-3, 0) \cup (3, \infty)$$

$$\text{inflektionspunkter: } x=0, x=-3, x=3$$

		-3	0	3			
$-x$	+	+	0	-	-	-	
$9-x^2$	-	0	+	+	+	0	-
f''	-	0	+	0	-	0	+
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$
	konkav		konvex		konkav		konvex

Sats (Förstaderivatatestet): Antag att funktion f är deriverbar på (a, b) och $c \in (a, b)$.

1. Om $f'(x) > 0, x \in (a, c)$ och $f'(x) < 0, x \in (c, b)$, så har f ett lokalt maximum i c .
2. Om $f'(x) < 0, x \in (a, c)$ och $f'(x) > 0, x \in (c, b)$, så har f ett lokalt minimum i c .

Sats 2 (Andraderivatatestet): Atag att funktion f är två gånger deriverbar på (a, b) och $c \in (a, b)$.

1. Om $f'(c) = 0$ och $f''(c) < 0$, så är c ett lokalt max.
2. Om $f'(c) = 0$ och $f''(c) > 0$, så är c ett lokalt min.
3. Om $f'(c) = 0$ och $f''(c) = 0$, så kan ingen slutsats dras. c kan vara lokalt max eller lokalt min eller inflektionspunkt.

Exempel 2: $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2 > 0, \forall x \Rightarrow$

f'	-	0	+
f''		+	+
f		$\searrow$	$\nearrow$

Exempel 3: $f(x) = x + 5 + \frac{4x+1}{2-x} \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x) = 1 + \frac{4(2-x) + 4x+1}{(2-x)^2} = 1 + \frac{9}{(2-x)^2} > 0$$

$$f'' = \frac{18}{(2-x)^3} > 0$$

$\Rightarrow f$ växande, konvex, ingen inflektionsp.

$f_{\min}(0) = 0$
ingen
inflektions.

L'Hospital regel

(gränsvärden $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ är obestämd)

Sats 3: Antag att f och g är deriverbara och $g'(x) \neq 0$ på ett öppet intervall I som innehåller a och att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \quad a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

eller

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

Då gäller att:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Obs!: $x \rightarrow a$ kan bytas mot $x \rightarrow a^+$ eller $x \rightarrow a^-$

Exempel 4:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-x^2-2 \cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x+2 \sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2+2 \cos x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x}{24x} = -\frac{1}{12} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0 \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{4} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = \\ = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x)} = e^0 = 1$$

Andra obestämda uttryck i gränsvärden: $0\infty, \infty - \infty, 0^0, 0^\infty, \infty^0, 1^\infty$

Dessa går ibland att göra om i formen $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\infty}{\infty}$

$(\infty - \infty)$

Exempel 5:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1}} =$$

$(\infty - \infty)$ konjugat ↑

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{\cancel{2x} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{\cancel{x} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}} = \infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \rightarrow 1 \text{ och } \frac{1}{\sqrt{x+1}} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty$$

Exempel: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ på $[-2, 2]$ - Extremvärden?

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$$

x	-2	-1	0	1	2
$x^2 - 1$	-	-	-	+	+
f'	-	+	-	+	+
f	↘	↗	↘	↗	↗

$$f_{\min}(-1) = -4$$

$$f_{\max}(0) = -3$$

$$f_{\min}(1) = -4$$

$$f(-2) = 5$$

$$f(2) = 5$$

global max i ± 5

lokalt max i 0

globalt min i ± 1

	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
f''	+	-	+
f	U	∩	U

$\Rightarrow \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ inflektionspunkter