

Föreläsning 15

Kurvkonstruktion

Kurvkonstruktion

1. Bestäm definitionsmängden D_f

2. Hitta f' och f''

3. Bestäm minimum och maximum till $f(x)$ med hjälp av f' (tabell!)

4. Bestäm konvexitet/konkavitet/inflektionspunkter av $f(x)$ med hjälp av f'' (tabell)

5. Asymptoter

- horisontell (vågrät) (när $x \rightarrow \pm \infty$)

- vertikal (lodrät) (när $x \rightarrow a^+$ eller $x \rightarrow a^-$ och f är inte definierad i a)

- sneda (f har en sned asymptot $y = kx + w$ om

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - (kx + w)) = 0$$

För att bestämma k och w :

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad w = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx)$$

Exempel 1:

$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$, $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{x(2-x)}{e^x}$

$f''(x) = \frac{(2-2x)e^x - (2x-x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{2-2x-2x-x^2}{e^x} = \frac{x^2-4x+2}{e^x}$

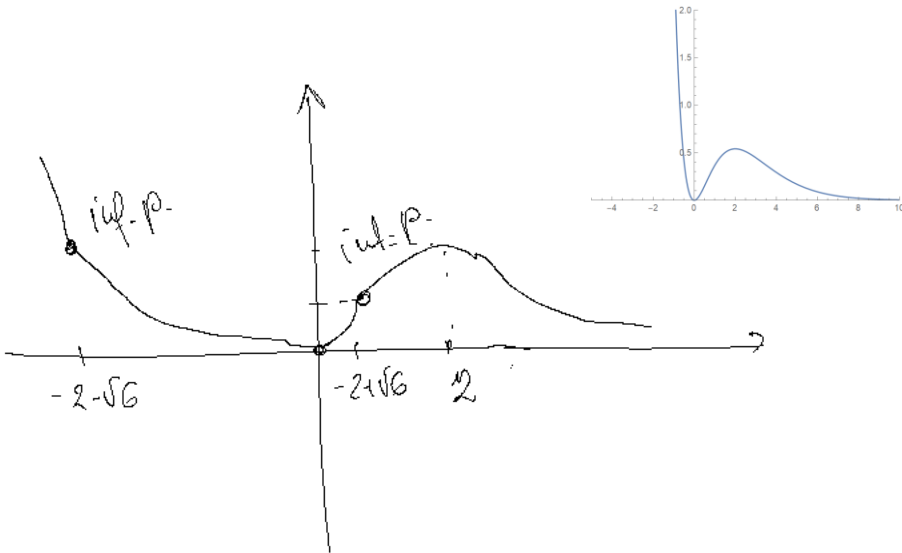
$x_R = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{-2} = -2 \pm \sqrt{2}$

x	-	0	+	2	+
2-x	+	+	+	0	-
f'	-	0	+	0	-
f	↘	f _{min}	↗	f _{max}	↘

$f_{\min}(0) = 0$
 $f_{\max}(2) = \frac{4}{e^2}$
globalt minimum
lokalt maximum

	-2-√2	-2+√2	
f''	+	0	-
f	∪	inf. p.	∩

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \infty$



Exempel 2: $f(x) = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ($x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$)

$$f'(x) = \frac{5x^4(x^2-1)^2 - 2(x^2-1) \cdot 2x \cdot x^5}{(x^2-1)^4} = \frac{x^4(x^2-1)[5(x^2-1) - 4x^2]}{(x^2-1)^4} = \frac{x^4(x^2-5)}{(x^2-1)^3} \rightarrow \text{Obs. att } x^4 \geq 0, \forall x \in D_f$$

$$f''(x) = \frac{(6x^5 - 20x^3)(x^2-1)^3 - 3(x^2-1)^2 \cdot 2x \cdot x^4(x^2-5)}{(x^2-1)^6} = \frac{\cancel{(x^2-1)^2} [(6x^5 - 20x^3)(x^2-1) - 6x^5(x^2-5)]}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{6x^7} - 20x^5 - \cancel{6x^5} + 20x^3 - \cancel{6x^7} + 30x^5}{(x^2-1)^4} = \frac{4x^5 + 20x^3}{(x^2-1)^4} = \frac{4x^3(x^2+5)}{(x^2-1)^4} \rightarrow \text{Obs. att } x^2+5 > 0, \forall x \in D_f$$

x^2-5	+	0	-	↗	-	↘	-	0	+
$(x^2-1)^3$	+	+	+	↗	-	↘	+	+	+
f'	+	0	-	↗	+	↘	-	0	+
f	↗	$f_{\max}$	↓	↗	↑	↘	$f_{\min}$	↓	↑

$$f_{\max}(-\sqrt{5}) = \frac{-25\sqrt{5}}{16}$$

$$f_{\min}(\sqrt{5}) = \frac{25\sqrt{5}}{16}$$

x^3	-	↗	0	+	↘	+
$(x^2-1)^4$	+	↗	+	+	↘	+
f''	-	↗	-	+	↘	+
f	↖	↖	↖	↖	↖	↖

g.dg

g.dg

0 inflexionspunkt

Exempel 2 (kont.)

Asymptoter: horisontella om $x \rightarrow \pm \infty$
vertikala om $x \rightarrow -1^\pm$ och $x \rightarrow 1^\pm$
sueda (?)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{(x^2-1)^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{(x^2-1)^2} = -\infty \Rightarrow$ ingen horisontell asymptot $\Rightarrow$ undersöka om det finns
sueda asymptoter

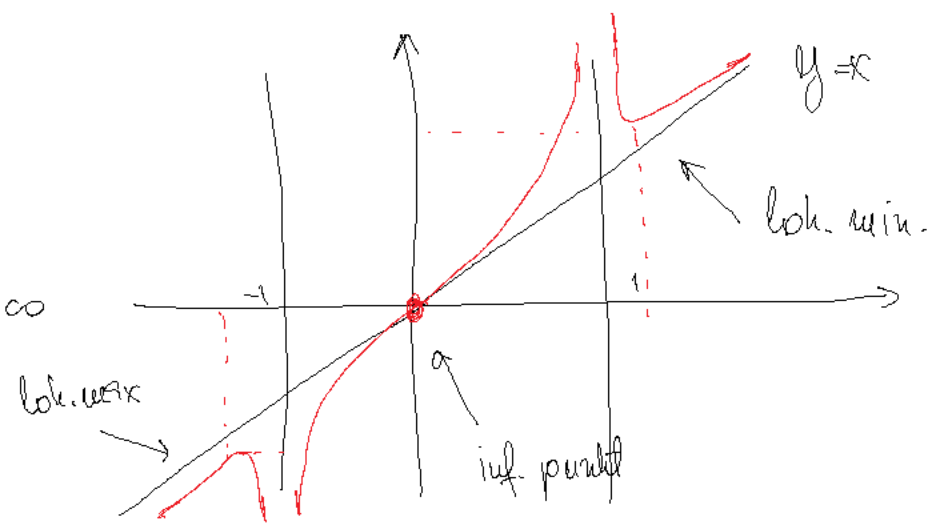
sueda asymptoter: $k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^5}{x(x^2-1)^2} = 1$

$$w = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^5}{(x^2-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^5 - x(x^4 - 2x^2 + 1)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\cancel{x^5} - \cancel{x^5} + 2x^3 - x}{(x^2-1)^2} = 0$$

$\Rightarrow y = x$ sued asymptot

vertikala asymptoter: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^5}{(x^2-1)^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{x^5}{(x^2-1)^2} = -\infty$



$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}, \text{ asymptotes?}$$

$$\text{Sned asymptot: } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$$

(k=1) x

$$w = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

$$w = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1 - x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}-x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{x+1} = -1$$

$$y = x - 1 \text{ sned asymptot}$$