

Föreläsning 16

Optimering
Primitiv funktion

Optimering

Exempel 1: Antag att cylindern har volym 1l. Bestäm sambandet mellan radie (r) och höjden (h) så att cylinderns yta är minimal.

$$V = r^2 \pi h = 1000 \text{ cm}^3$$

$$A = 2r^2 \pi + 2r \pi h$$

Vad är sambandet mellan r och h ?

$$r^2 \pi h = 1000 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{r^2 \pi}$$

$$\textcircled{1} A = 2r^2 \pi + 2r \pi \cdot \frac{1000}{r^2 \pi}$$

$$A = 2r^2 \pi + \frac{2000}{r} \quad - \text{funktion av en variabel}$$

$$A' = 4r \pi - \frac{2000}{r^2}$$

$$\text{hitta kritiskpunkt: } A' = 4r \pi - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$r^3 \pi - 500 = 0 \Rightarrow$$

$$r = \sqrt[3]{500/\pi}$$

$\textcircled{2}$ Avgöra om punkten är minimum.

$$D_A = (0, \infty), \quad \begin{array}{c|c|c} A' & - & + \\ \hline A & & \nearrow \end{array} \rightarrow \text{global minimum}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1000}{r^2 \pi} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{(500)^2 \pi^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \cdot 500^3}}{\sqrt[3]{500^2 \pi}} = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Exempel 1 (forts.)

Metod 2 för samma problem:

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi h, \quad r^2\pi h = 1000$$

implicit derivering + h är funktion av r :

$$A' = 4r\pi + 2\pi h + 2r\pi h', \quad 2r\pi h + r^2\pi h' = 0$$

Kritiskpunkt:

$$A' = 4r\pi + 2\pi h + 2r\pi h' = 0, \quad 2h + r h' = 0$$

$$\Rightarrow h' = -\frac{2h}{r}$$

$$\Rightarrow 4r\pi + 2\pi h - \cancel{2r\pi} \cdot \frac{2h}{\cancel{r}} = 0$$

$$\Rightarrow 2r + h - 2h = 0 \Leftrightarrow h = 2r$$

Exempel 2: Bestäm punkt som ligger på kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ och som är närmast till punkten $(4, 1)$.

distans mellan två punkter: $d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ $\rightarrow$ bestäm $d_{\min}$
 (x, y) och (a, b)

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} \quad \text{och} \quad y = \frac{x^2}{2}$$

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2}$$

Det är lättare att derivera d^2 : $d^2 = (x-4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2$

$$f(x) = (x-4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2$$

$$f'(x) = 2(x-4) + 2\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)x = 2x - 8 + x^3 - 2x = x^3 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, y = 2$$

f'		2	
	-		+
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f_{\min}(2) = 4 + 1 = 5$$

$$d^2_{\min} = 5 \Rightarrow d_{\min} = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow (2, 2)$ är närmaste punkt till $(4, 1)$

Primitiv funktion

Definition 1: En deriverbar funktion F är primitiv funktion (antiderivatan) till en funktion f på ett intervall I om $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Vi skriver $F(x) = \int f(x)dx$

Exempel 1: Bestäm primitiv funktion till:

a) $f(x) = \sin x$: om $\underline{F(x) = -\cos x} \Rightarrow F'(x) = \sin x \Rightarrow$ primitiv: $F(x) = -\cos x + C$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$: ① $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x + C$ på $I \subset (0, \infty)$
② $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ om $x \neq 0 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \ln x + C, x > 0 \\ \ln(-x) + C, x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = x^n$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n, \quad n \neq -1 \quad \Rightarrow \quad F'(x) = x^n + C$$

Exempel 2: Bestäm f om $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$, $f(1) = 1$

① Bestäm f' som primitiv till f'' :

$$f'(x) = \frac{12x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 4x + C$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

② Bestäm f som primitiv till f' :

$$f(x) = \frac{4x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + Cx + D$$

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

③ Använda villkor $f(0) = 4$, $f(1) = 1$ för att bestämma C och D .

$$f(0) = D = 4$$

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1 \Rightarrow C = -3$$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Exempel 1: Visa att funktion $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 6$ har minst två lösningar på intervallet $[1, 4]$.

Exempel 2: Visa att ekvation $x^4 + 4x + C = 0$ har inte mer än två reella rötter.

Lösning (Ex 1):

x	1	2	3	4
f(x)	5	0	-3	2

f definierad + kontinuerlig
på $[1, 4] \Rightarrow$ Satsen om
 Mellanliggande värden $\Rightarrow$

$\exists C \in (3, 4)$ så att $f(C) = 0$
och $f(2) = 0$ $\Rightarrow$ minst två
lösningar

Lösning (Ex 2):

$$f(x) = x^4 + 4x + C$$

(#) ...

$$f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1) = 4(x+1)(x^2 - x + 1)$$

f'	-	+
f	$\searrow$	$\nearrow$

$$f_{\min}(+) = -3 + C$$

$$f(0) = C$$

$$-3 + C > 0 \Leftrightarrow C > 3$$

① $C < 3$: $f(-1) < 0$

$f_{\min}(+) < 0$, kont. $\Rightarrow$ det finns två rötter

② $C > 3$: $f(+) > 0$, f växande $\Rightarrow$ finns inga rötter

③ antag att det finns tre rötter x_1, x_2, x_3

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0 \Rightarrow \text{enligt Rolles sats}$$

$$\exists C_1 \in (x_1, x_2) \text{ så att } f'(C_1) = 0$$

$$\exists C_2 \in (x_2, x_3) \text{ så att } f'(C_2) = 0$$

men p.g.a (#) är
det omöjligt $\Rightarrow$ $\square$

endast en
reell rött

$$x = -1$$

