# Lösning till Övningstenta VT21

1. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{\tan 2x} \overset{HR}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{2}{(\cos x)^2}} = -\dfrac{1}{2} \quad \left( \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \ln(1-x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \tan 2x = 0 \end{array} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4} \overset{HR}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 6x}{2x^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-6}{2x} = \dfrac{0}{4} = 0 \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left( \frac{1}{2}\ln(2x^2+2) - \frac{1}{3}\ln(3x^2+3) \right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 3 = \ln \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$

2. a) $2\log_3 x + \log_9 x = 10$

$2\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x = 10$

$\frac{5}{2}\log_3 x = 10$

$\log_3 x^{5/2} = \log_3 3^{10}$

$x^{5/2} = 3^{10}$

$x = 3^{10 \cdot \frac{2}{5}}$

$x = 3^4 = 81$

b) $\sqrt{5x-16} < \sqrt{2x-4}$ , $5x-16 \geq 0$ och $2x-4 \geq 0$ $\Leftrightarrow x \geq \frac{16}{5}$ och $x \geq 2$ $\Rightarrow x \geq \frac{16}{5}$

$(\sqrt{5x-16})^2 < (\sqrt{2x-4})^2$

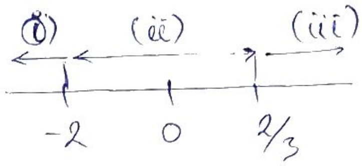
$5x-16 < 2x-4$

$3x < 12$

$x < 4 \longrightarrow x \in \left[\frac{16}{5}, 4\right)$

c) $|3x-2| + |x+2| = 6$

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{om } x \geq 2/3 \\ -3x+2 & \text{om } x < 2/3 \end{cases}$$




$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{om } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{om } x < -2 \end{cases}$$

i) $x < -2$: $-3x+2+(-x-2) = 6$

$-4x = 6$

$x = -1{,}5$ (~~fel~~ ej lösning eftersom $-1.5 > -2$)

ii) $-2 \leq x < 2/3$: $-3x+2+x+2 = 6$

$-2x+4 = 6$

$-2x = 2$

$x = -1$

iii) $x \geq 2/3$: $3x-2+x+2 = 6$

$4x = 6$

$x = 1.5$

3. $f(x) = \ln|1+2x| - \arctan x$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ eftersom $|1+2x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ och $\ln x$ är definierade för $x > 0 \Rightarrow |1+2x| > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2+2-1-2x}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{2x^2-2x+1}{(1+2x)(1+x^2)}$$

pq-formeln $\Rightarrow 2x^2-2x+1 = 0$ har ingen reell lösning

$\Rightarrow 2x^2-2x+1 > 0$, $\forall x \in D_f$

$1+x^2 > 0$, $\forall x \in D_f$ $\Rightarrow$

| $1+2x$ | $-$ | $-1/2$ | $+$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | ej.def | $\nearrow$ |

$$f''(x) = \left(\frac{2}{1+2x} - \frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{4}{(1+2x)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{-4(1+2x^2+x^4) + 2x(1+4x+4x^2)}{(1+2x)^2(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{-4 \cancel{-8x^2} - 4x^4 + 2x \cancel{+8x^2} + 8x^3}{(1+2x)^2(1+x^2)^2} = \frac{-4x^4+8x^3+2x-4}{(1+2x)^2(1+x^2)^2}$$

$$\underbrace{-4x^4+8x^3}+\underbrace{2x-4} = -4x^3(x-2) + 2(x-2) = (x-2)(2-4x^3)$$

$$= 2(x-2)(1-2x^3) = 2(x-2)(1-x\sqrt[3]{2})(1+x\sqrt[3]{2}+(x\sqrt[3]{2})^2)$$

$\uparrow$

enligt $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

för $a=1$, $b=x\sqrt[3]{2}$

| | | $-1/2$ | | $1/\sqrt[3]{2}$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $1-x\sqrt[3]{2}$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\cap$ | | $\cap$ | | $\cup$ | | $\cap$ |
| | konkav | | konkav | $\downarrow$ | konvex | $\downarrow$ | konkav |

inflektionspunkt

Asymptoter:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}-} (\ln|1+2x| - \arctan x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}+} (\ln|1+2x| - \arctan x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{2}$ vertikal asymptot

eftersom $\ln x \to -\infty$, $x \to 0$ och $\arctan(-\frac{1}{2})$ är endligt tal

$$\lim_{x\to\infty} (\ln(1+2x) - \arctan x) = \infty - \frac{\pi}{2} = \infty$$

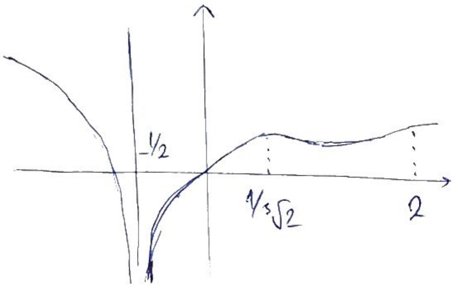
$$\lim_{x\to-\infty} (\ln(-1-2x) - \arctan x) = \infty - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

} ej asymptot

Sned asymptot?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2x) - \arctan x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{1+2x} - \frac{1}{1+x^2}}{1} = 0$$

$\Rightarrow$ finns ej sned asymptot (eftersom $k=0$)




4. $2\sin x \cos y = 1$ , $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$

$2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y \cdot y' = 0$

$$y' = \frac{2\cos x\cos y}{2\sin x \sin y} = \frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = -1$$

tangentlinjen: $y - a_2 = y'\cdot(x - a_1)$ , $(a_1, a_2)$ koordinater

$y + \frac{\pi}{4} = -1\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y = -x$

5. $f$ definierad, kontinuerlig på $\mathbb{R}$
deriverbar

$f'(x) = 7x^6 + 5x^4 + 3 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f$ strängt växande

$\Rightarrow$ $f$ inverterbar

$$(f(f^{-1}(x)) = x$$

$$(f(f^{-1}(x))' = f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1})'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

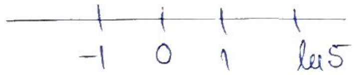
$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{15}$$

eftersom : $f(1) = 1^7 + 1^5 + 3\cdot 1 = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 1$

och $f'(1) = 7\cdot 1^6 + 5\cdot 1^4 + 3 = 15$

6. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{e^x-5}$ , $e^x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \ln 5$

a)




$e < 5 \Rightarrow \ln e < \ln 5$

$\Rightarrow 1 < \ln 5$

f är definierade på $[-1,1]$

$x^2+3$, $e^x-5$ kontinuerliga på $[-1,1]$ $\Big\} \Rightarrow$ f är kontinuerlig på $[-1,1]$

b)


f är inte definierade i $x = \ln 5$

$\Rightarrow$ f är inte kontinuerlig på $[-\sqrt{3}, 5]$

7. f är kontinuerlig om $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ln a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = e^{1/2}$$

$$f(0) = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

8. Enligt Medelvärdesatsen : $f'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ för någon $x \in [a,b]$

$$f'(x) = \frac{f(0)-f(-7)}{0-(-7)} = \frac{f(0)-3}{7}$$

$$f(0) = 7 \cdot f'(x) + 3 \leq 7 \cdot 2 + 3 = 17$$

9. $x^5 + 12x + 1 = 0$ har endast en reell lösning

i) $x = 0$ : $0^5 + 12 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$ $\rightarrow$ $f(x) = x^5 + 12x + 1$
$f(0) > 0$

$x = -1$ : $f(-1) = -1^5 + 12 \cdot (-1) + 1 = -12 < 0$

$f$ är definierad och kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$

Enligt satsen om mellanliggande värden $\rightarrow$ $\exists c \in (-1, 0)$ så att $f(c) = 0$

$\Rightarrow$ det finns en reell lösning

ii) För att bevisa att det finns endast en reell lösning, antag att det finns två : $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ så att
$f(x_1) = f(x_2) = 0$

Enligt Rolles satsen : $\exists d \in (x_1, x_2)$ så att $f'(d) = 0$

men $f'(x) = 5x^4 + 12 > 0$ , vilken menar att $f'(d) > 0$

$\Rightarrow$ detta är omöjligt $\Rightarrow$ det finns inte två lösningar

$\Rightarrow$ det finns endast en reell lösning

10. $f$ måste vara kontinuerlig och deriverbar när $x = 4$

$f$ kontinuerlig i $x=4$: $4a-3 = -16+40-b$

$4a+b = 27$

$f$ deriverbar i $x=4$: $a = -2\cdot4+10 = 2$

$$\left.\begin{aligned} 4a+b &= 27 \\ a &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=2,\ b=19$$

11. $\frac{dV}{dt} = -1\ \text{cm}^3/\text{min}$

$\frac{dr}{dt} = ?$

$V = \frac{4}{3} r^3 \pi \Rightarrow$ implicit derivering

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} r^2 \frac{dr}{dt}\pi$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi \cdot 4\text{cm}^2} \cdot (-1)\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{16\pi}\ \text{cm}/\text{min}$$