

Betygsgränser: 3: 20-30p, 4: 31-40p, 5: 41-50p.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen.

Resultat meddelas via Ladok ca. 15 arbetsdagar efter tentamenstillfället.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. Endast svar ger inga poäng. Motivera och förklara så väl du kan. Alla hjälpmedel (utom samarbete) är tillåtna.

1.(6p) Bestäm följande gränsvärden:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1+x) - \sin(1)}{x} =$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + (x^2 - 3x)^{1/2}) =$

c) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{\sin x} + \ln x \right) =$

2. (6p) Låt

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1+x^2}{x} + \arctan \frac{1+2x^2}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

Visa att $f(x)$ är konstant på intervallet $x < 0$ och på intervallet $x > 0$. Ta reda på vilka dessa konstanta värden är och rita sedan grafen $y = f(x)$.

3. (6p) För $a > 0$, dra tangentlinjen till kurvan $y = x^2$ i punkten (a, a^2) och tangentlinjen till kurvan $y = 1/x$ i punkten $(-a, -1/a)$. Dessa linjer möts i en punkt $P(x_0, y_0)$. Vilka värden kan P:s y-koordinat ha om $a > 0$?

4. (6p) Rita grafen till funktionen $f(x) = 1 - \frac{1}{(1-x)(2-x)}$. Ange eventuella asymptoter, lokala extrempunkter, konvexitet/konkavitet och inflexionspunkter.

5. (4p) Hur många lösningar $x \in \mathbb{R}$ har ekvationen $e^{-x}(x^2 + 5x + 1) = 5$? Motivera ditt svar.

6. (4p) Bestäm konstanterna $A, B \in \mathbb{R}$ så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin Ax}{e^{x^2} - 1}, & x < 0 \\ B, & x = 0 \\ \arctan\left(\frac{e^x}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$.

7. a) (3p) Visa att $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$ om $x > 1$.

b) (4p) Visa att $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$ om n är positiv heltal.

8. (6p) En konserveburk består av en cirkulär cylinder samt två identiska cirkelskivor. Vad är burkens största möjliga volym om burkens area är $24\pi \text{ cm}^2$?

9. (5p) Bestäm $f(x)$ om $f''(x) = 24x^2 - 48x + 3$, $f'(1) = -9$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = -4$.

Lycka till!
/Sonja