Anonym kod	MVE535/415 Matematisk Analys, Del 1 2019-06-12	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös ekvationen, $2|x+2| = 7+3x$. (2 p)

Lösning: Två fall:

I. $x \geq -2$ dvs $|x+2| = x+2 \Rightarrow 2(x+2) = 7+3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+4 = 7+3x \Leftrightarrow x = -3 < -2$ ↯ Falsk rot!

II. $x < -2$ dvs $|x+2| = -(x+2) \Rightarrow -2(x+2) = 7+3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x-4 = 7+3x \Leftrightarrow 5x = -11 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{5} < -2$ ok!

Svar: $x = -\frac{11}{5}$

(b) Lös ekvationen, $2\ln(x+1) = \ln(2) + \ln(x+5)$. $(*)$ (2 p)

Lösning:

$(*) \Leftrightarrow \ln((x+1)^2) = \ln(2(x+5)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 2(x+5) \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 2x+10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3 \Leftarrow$ Falsk rot då $\ln(-3+1)$ ej def.!

Svar: $x = 3$

(c) Bestäm centrum och radie till cirkeln $x^2 - 8x + y^2 + 10y = -35$. $(*)$ (2 p)

Lösning:

$(*) \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot 4x + 4^2 + y^2 + 2\cdot 5y + 5^2 = -35 + 4^2 + 5^2$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+5)^2 = -35 + 41 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-(-5))^2 = (\sqrt{6})^2$

Svar: Centrum: $(4,-5)$ Radie: $\sqrt{6}$

(d) Beräkna derivatan av $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+2}{x\sqrt{3}}\right)$ och förenkla resultatet så långt som möjligt. (2 p)

Lösning: $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(x+2)^2}{3x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2}\right) =$

$= \frac{4}{3x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{(x+2)^2}{3x^2}} = \frac{4}{3x^2+(x+2)^2} =$

$= \frac{4}{3x^2+x^2+4x+4} = \frac{4}{4x^2+4x+4} = \frac{1}{x^2+x+1}$

Svar: $f'(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

(e) Funktionen $y(x)$ uppfyller ekvationen $(x-1)y^3+y^2-xy=0$ och man vet att $y(1)>0$. Bestäm $y'(1)$. (2 p)

Lösning: Då $x=1$ fås: $(y(1))^2 - 1\cdot y(1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(1)(y(1)-1)=0 \Rightarrow \{y(1)>0\} \Rightarrow y(1)=1$

Derivera implicit:

$y^3 + 3(x-1)y^2 \cdot y' + 2y\cdot y' - x - xy' = 0$

I punkten $(1,1)$: $1^3 + 0 + 2\cdot 1 \cdot y'(1) - 1 - 1\cdot y'(1) = 0$

$\Leftrightarrow y'(1) = 0$

Svar: $y'(1) = 0$

(f) Bestäm en primitiv funktion (antiderivata) till $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$. (2 p)

Lösning: Har att: $\frac{d}{dx}\left((x^2+1)^{2/3}\right) = \frac{2}{3}(x^2+1)^{-1/3}\cdot 2x = \frac{4}{3}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

$\Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{4}{3}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx =$

$= \frac{3}{4}\int \frac{d}{dx}(x^2+1)^{2/3}\,dx = \frac{3}{4}\cdot(x^2+1)^{2/3} + C$

Svar: $\frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3}$

2. (a) $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-6x+5}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-6x+5}}{x-\sqrt{x^2-6x+5}} =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2-6x+5)}{x-\sqrt{x^2-6x+5}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6x-5}{x-\sqrt{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\sqrt{x^2}=|x| \\ x\to-\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow x<0\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6x-5}{x+x\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(6-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)} = \frac{6}{1+\sqrt{1}} = \underline{\underline{3}}$$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos(x)-1} \leftarrow \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-\sin(x)} \leftarrow \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{-\cos(x)} = \frac{2}{-1} = \underline{\underline{-2}}$$

(c) Låt $y=\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}$

$$\lim_{x\to\infty}\ln(y) = \lim_{x\to\infty} 2x\cdot\ln\left(1+\frac{5}{x}\right) \leftarrow [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\ln\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \leftarrow \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{1+\frac{5}{x}}\cdot\left(-5\cdot\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{10}{1+\frac{5}{x}} = 10$$

$\ln(y)\to 10$ då $x\to\infty \Rightarrow y\to e^{10}$ då $x\to\infty$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x} = e^{10}$$

3. $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+h+1}}{h\sqrt{x+1}\sqrt{x+h+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+1-(x+h+1)}{h\sqrt{x+1}\sqrt{x+h+1}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}1}{\cancel{h}\sqrt{x+1}\sqrt{x+h+1}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1})} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{2(x+1)^{3/2}}$$

4. Steg 1: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Steg 2: I. Lodräta:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x^3} = -\infty \quad \left(\text{"}\frac{-1}{0^+}\text{"}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x^3} = \infty \quad \left(\text{"}\frac{-1}{0^-}\text{"}\right)$$

II. Vågräta:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

$\therefore$ $x=0$ lodrät asymptot, $y=0$ vågrät asymptot

(sned asymptot finns ej)

Steg 3: $f'(x) = \dfrac{2x\cdot x^3-(x^2-1)\cdot 3x^2}{x^6} =$

$$= \frac{\cancel{x^2}(2x^2-3x^2+3)}{x^{\cancel{6}4}} = \frac{3-x^2}{x^4} = \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{x^4}$$

$f'(x)=0 \implies x_1=-\sqrt{3}\,,\ x_2=\sqrt{3}$ Kritiska punkter

Steg 4: $f''(x) = \dfrac{-2x\cdot x^4-4x^3(3-x^2)}{x^8} =$

$$= \frac{-2\cancel{x^3}(x^2+2(3-x^2))}{x^{\cancel{8}5}} = \frac{-2(6-x^2)}{x^5} = \frac{2(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})}{x^5}$$

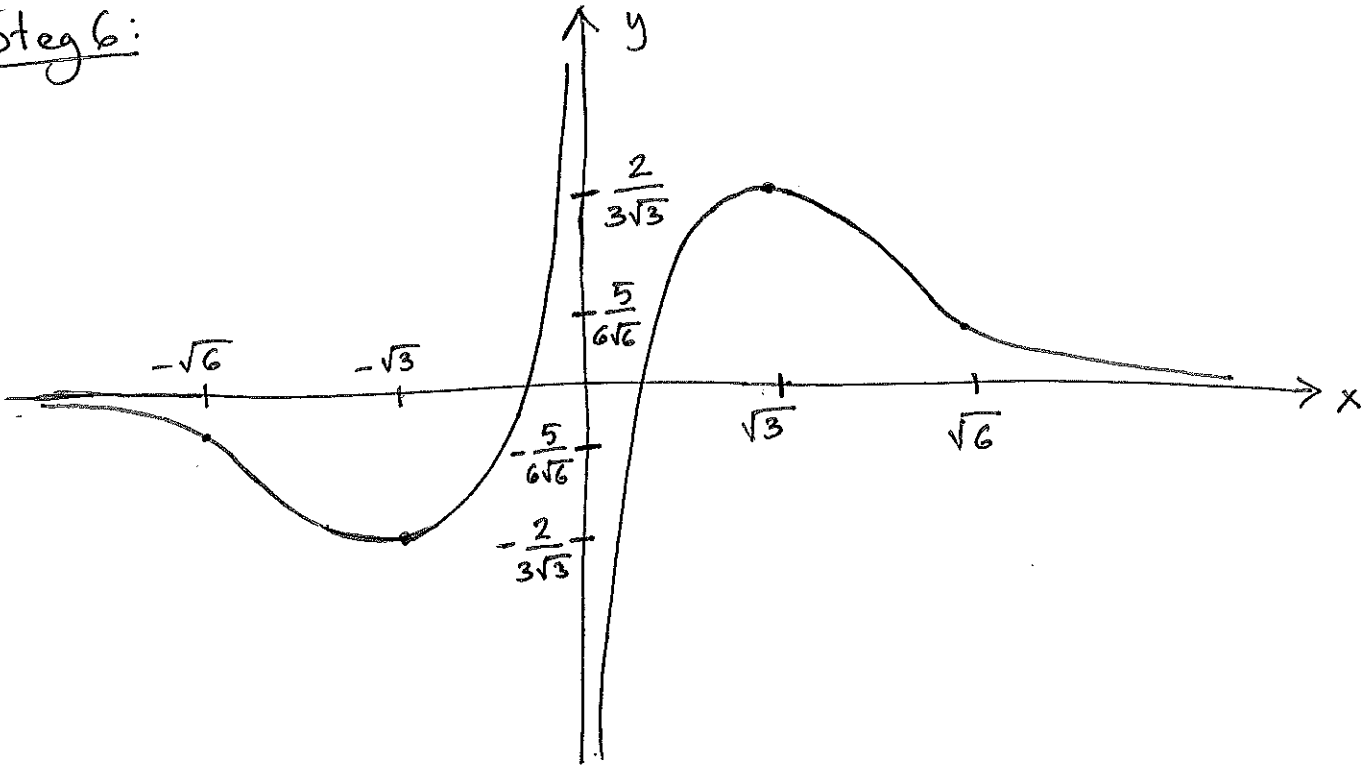
$f''(x)=0 \implies x_3=-\sqrt{6}\,,\ x_4=\sqrt{6}$ ev. infl. punkter.

Steg 5:

	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		0^-	0^+		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$		∞
f'		$-$		$-$	0	$+$			$+$	0	$-$		$-$	
f''		$-$	0	$+$		$+$			$-$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow\cap$		$\searrow\cup$		$\nearrow\cup$	∞	$-\infty$	$\nearrow\cap$		$\searrow\cap$		$\searrow\cup$	0

$$f(\pm\sqrt{6}) = \pm\frac{5}{6\sqrt{6}} \quad , \quad f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Steg 6:



5. Låt $T(t)$ = temperaturen hos burken t h efter att den har tagits ut från kylen.

Newtons avkylningslag:

$$\begin{cases} T'(t) = k(T(t)-20) \\ T(0) = 5 \end{cases} \qquad (*)$$

Låt $y(t) = T(t) - 20 \Rightarrow y'(t) = T'(t)$

$y(0) = T(0) - 20 = 5 - 20 = -15$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(t) = k\,y(t) \\ y(0) = -15 \end{cases} \Rightarrow y(t) = -15e^{kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T(t) - 20 = -15e^{kt} \Leftrightarrow T(t) = 20 - 15e^{kt}$$

Vet att: $T(\frac{1}{2}) = 10 \Leftrightarrow 20 - 15e^{k/2} = 10 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 15e^{k/2} = 10 \Leftrightarrow e^{k/2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 2\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\ T(t) = 20 - 15e^{2t\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Söker t så att: $T(t) = 15 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 20 - 15e^{2t\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 15 \Leftrightarrow 15e^{2t\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 5$$

$$\Leftrightarrow e^{2t\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2t\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore\ t = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{2\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\ \text{h}$$

6. $f(x) = e^{-x^2-x}\sqrt{2x+1}$ ← väldef. om $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow$

↑ väldef. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow D_f = [-\tfrac{1}{2}, \infty)$$

Vill bestämma max. och min. (globalt)

$$f'(x) = (-2x-1)e^{-x^2-x}\sqrt{2x+1} + e^{-x^2-x} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \cdot 2 =$$

$$= e^{-x^2-x}\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - (2x+1)\sqrt{2x+1}\right) =$$

$$= \frac{e^{-x^2-x}\left(1-(2x+1)^2\right)}{\sqrt{2x+1}} = \frac{e^{-x^2-x}\left(1-4x^2-4x-1\right)}{\sqrt{2x+1}} =$$

$$= -\frac{4x(x+1)e^{-x^2-x}}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow e^{-x^2-x} \cdot 4x(x+1) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -1 \notin D_f \text{ falsk rot!}$$

$f(x_1) = f(0) = 1$ max. eller min.?

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = f(-\tfrac{1}{2}) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{e^{x^2+x}} = 0$$

$\Longrightarrow f(0) = 1$ globalt max och $f(-\frac{1}{2}) = 0$ globalt min.

$$\therefore V_f = [0, 1]$$

7. $\ln(x) + 2x - Cx = 0 \iff \frac{\ln(x)}{x} + 2 = C$

Låt $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + 2$ och $g(x) = C$

Antal lösningar till ekvationen $\ln(x) + 2x - Cx = 0$

$\iff$

Antal skärningspunkter mellan f och g:s grafer för olika värden på C.

Rita grafen till f!

Steg 1: $D_f = (0, \infty)$

Steg 2: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} + 2 = -\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} + 2 \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} + 2 = 2$$

Steg 3: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

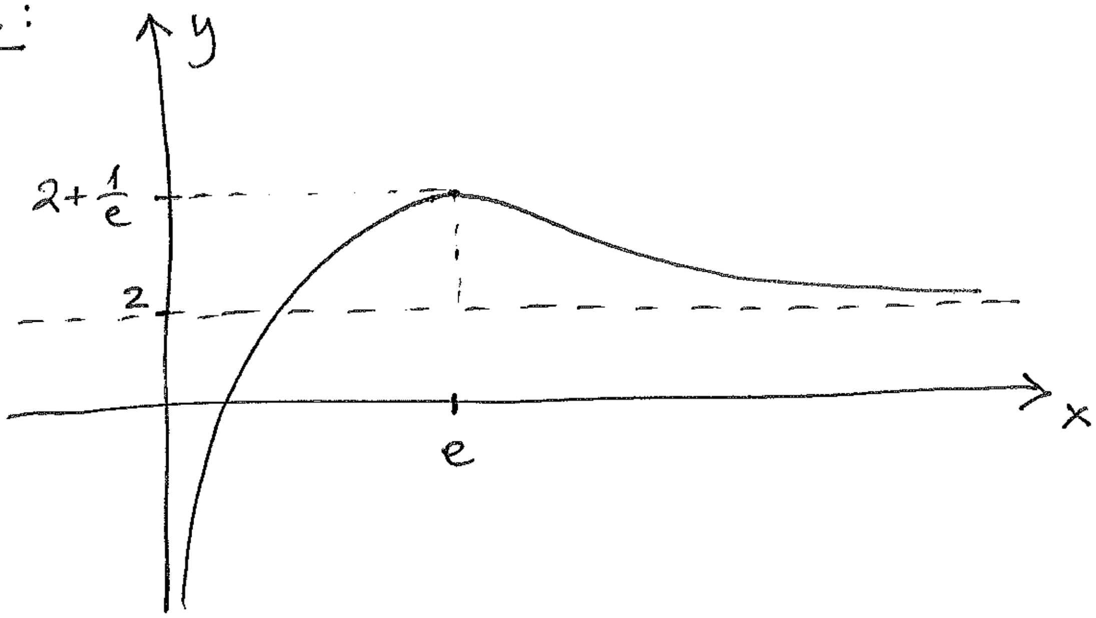
$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln(x) = 0 \iff x = e$ Kritisk punkt

Steg 4: Behövs ej!

Steg 5:

	0^+		e		∞
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}+2$	$\searrow$	2

Steg 6:



$\therefore$ En lösning då $C \in (-\infty, 2] \cup \{2+\frac{1}{e}\}$

Två lösningar då $C \in (2, 2+\frac{1}{e})$

Inga lösningar då $C \in (2+\frac{1}{e}, \infty)$

8. (a) Två intervall:

<u>$x \geq 0$</u>: $f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$ då $x > 0$

$\Rightarrow f(x)$ strängt avtagande då $x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ inverterbar då $x \geq 0$

<u>$x < 0$</u>: $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2} < 0 \text{ då } x<0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ strängt avtagande då $x < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ inverterbar då $x < 0$

Obs! Detta innebär <u>inte</u> automatiskt att f är inverterbar på <u>hela $\mathbb{R}$</u>!

f inverterbar på hela $\mathbb{R}$ om det inte finns något överlapp mellan f:s värden på $x \geq 0$ och $x < 0$.

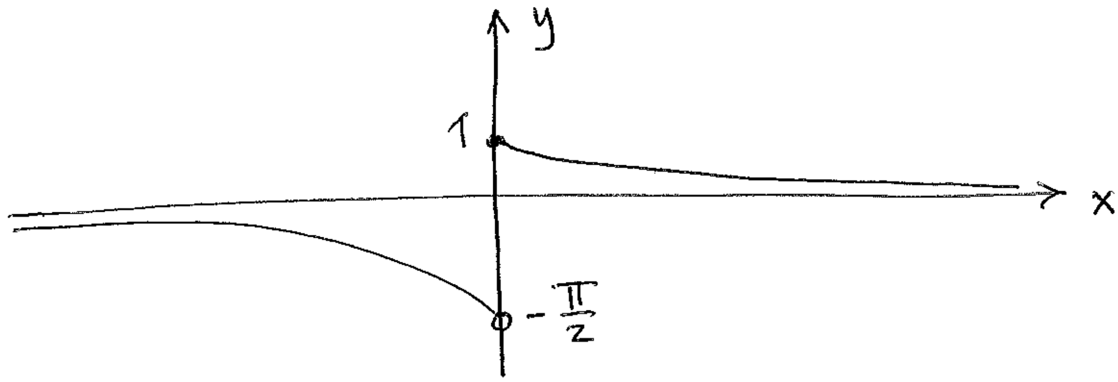
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \left\{ \begin{matrix} x \to 0^- \Rightarrow \\ \Rightarrow x < 0 \end{matrix} \right\} = \lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left\{ \begin{matrix} x \to 0^+ \Rightarrow \\ \Rightarrow x > 0 \end{matrix} \right\} = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0$$

Grafen till f har följande ungefärliga utseende!



Inga överlappande y-värden $\Rightarrow$ f är inverterbar på hela $\mathbb{R}$.

(b) $V_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$

$D_{f^{-1}} = V_f = \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right] \setminus \{0\}$