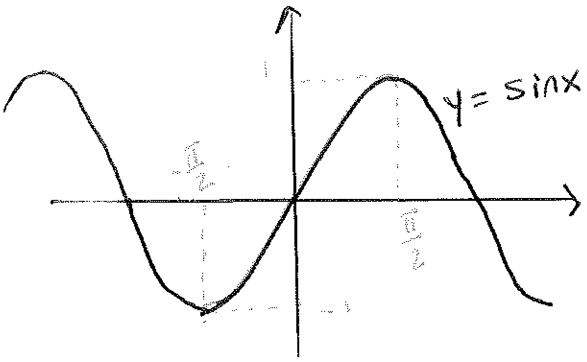
1.5 Inversen av trigonometriska funktioner

arcsinus



$f(x) = \sin x$ är inte injektiv på $\mathbb{R}$, men f är injektiv på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Anta att $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ så är f inverterbara, dvs f har en inversfunktion som kallas för arcussinus ; $f^{-1}(x) = \arcsin x$

(eller $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$). $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$ och $V_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

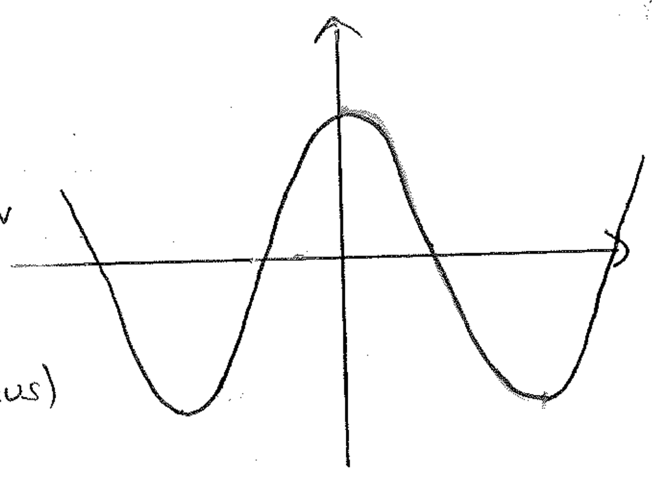
* $y = \sin x \;,\; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \iff x = \arcsin y$.
* $\sin(\arcsin x) = x \quad \forall\, x \in [-1, 1]$
* $\arcsin(\sin x) = x \quad \forall\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Ex. (a) $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ (inte $\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi$, eller $\frac{3\pi}{4} \pm 2n\pi$),

(b) $\sin(\arcsin(2))$ går ej $2 \notin [-1, 1]$.

(c) $\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{2}\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

arccosinus



$f(x) = \cos x$ är inte injektiv på $\mathbb{R}$ men den är injektiv på $[0, \pi]$.

Låt $f^{-1}(x) = \arccos x$ (arccosinus)

$= \cos^{-1} x$

vara inversen till f. $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

* $y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi \iff x = \arccos y.$

* $\cos(\arccos x) = x \quad \forall\ x \in [-1,1]$

* $\arccos(\cos x) = x \quad \forall\ x \in [0,\pi].$

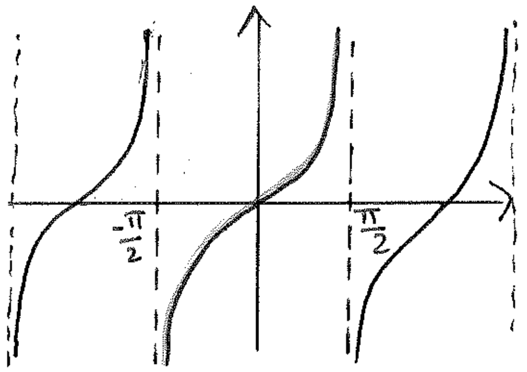
* $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$

ex. (a) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

(b) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$

arctan

Grafen till $y = \tan x$:



$f(x) = \tan x$ är injektiv på $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Låt $f^{-1}(x)$ vara inversen.

$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f^{-1}(x) = \arctan x := \tan^{-1} x$

ej injektive

* $y = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \iff x = \arctan y.$

* $\tan(\arctan x) = x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

* $\arctan(\tan x) = x \quad \forall\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

Ex. $\arctan\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$

Derivator av arcsin / arccos / arctan

<u>Sats</u>: Om f^{-1} är inversen till en funktion $f(x)$ så gäller att:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

<u>Bevis.</u> $f \circ f^{-1}(x) = x$. Derivera vänster och höger led.

Kedje regel $\Rightarrow$ $f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$

$$\Rightarrow \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

<u>Sats</u>: (i) $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$.

<u>Bevis</u>. (i) $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

($\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos(\arcsin x) \geq 0$

och $\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$ (trigonometriska ettan)

$\Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}$).

(ii) $\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(iii) $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$