

I. Visa att $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$.

Lös. Låt $f(x) = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

$\Rightarrow f(x)$ är en konstant $\Rightarrow f(x) = k$.

$$f(1) = \tan^{-1}1 + \cot^{-1}1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{\pi}{2}.$$

II. Beräkna derivatan av $f(x) = 4\sqrt{x} + 3$ med hjälp av derivatans definition:

Lös.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{x+h} + 3 - 4\sqrt{x} - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h-x)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

III. Beräkna $f'(1)$ om den existerar:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-1} &= x+1 \\ f(1) &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(1+h) - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2+2h-2}{h} = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)+1 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

$2 \neq 1 \Rightarrow f'(1)$ existerar inte.

IV

- Bestäm inversen till $f(x) = \sqrt{x+2}$
- Bestäm definitionsmängd och värdemängd till f och f^{-1} .

Lösning. 1) $y = \sqrt{x+2} \Rightarrow y^2 = x+2 \Rightarrow x = y^2 - 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2.$

2) $f(x) = \sqrt{x+2} \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2. \Rightarrow D_f = [-2, \infty).$

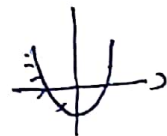
$\sqrt{x+2} \geq 0 \Rightarrow V_f = [0, \infty).$

$D_{f^{-1}} = V_f = [0, \infty) \quad V_{f^{-1}} = D_f = [-2, \infty).$

OBS: Även om funktionen $y = x^2 - 2$ är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$

är $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$, eftersom $y = x^2 - 2$ är inte injektiv ~~är~~ om $x \in \mathbb{R}$

men är injektiv om $x \in [0, \infty).$



V. Hur många lösningar har ~~är~~ ~~ekvationen~~ ekvationen

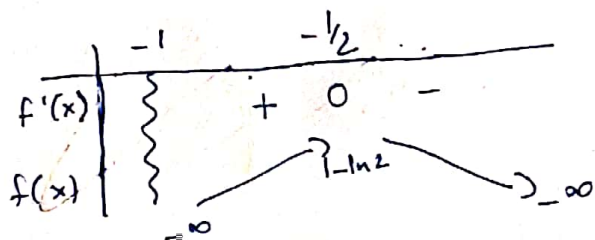
$\ln(x+1) - 2x = C.$

Lösning. Låt $f(x) = \ln(x+1) - 2x \quad D_f = (-1, \infty).$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 2 = \frac{1-2x-2}{x+1} = \frac{-2x-1}{x+1}$

, $x+1 > 0$ om $x > -1$

$\Rightarrow f'(x)$ har samma tecken som $-2x-1$



$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\underbrace{\ln(x+1)}_{\rightarrow -\infty} - \underbrace{2x}_{\rightarrow -2}) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x+1) - 2x) \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\ln(x+1)}{x} - 2 \right) = \infty(-2) = -\infty.$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{HR}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$

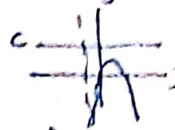
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(-\frac{1}{2} + 1\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 - \ln 2.$$



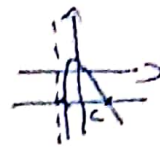
$\Rightarrow f(x) = C$ har

- ingen lösning om $C > 1 - \ln 2$
- 1 lösning om $C = 1 - \ln 2$ ($x = -\frac{1}{2}$)
- 2 lösningar om $C < 1 - \ln 2$.

ingen skärningspunkt



1 skärningspunkt



2 skärningspunkter.

VII. Visa med hjälp av medelvärtesatsen att $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Lösning: Låt $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ och $I = [0, x]$.

$f(x) = e^x$ är kontinuerlig på I och deriverbar i $(0, x)$.

$$\Rightarrow \text{MVS} \quad \exists c \in (0, x) \text{ så att } f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x} = e^c$$

$$\Rightarrow x e^c = e^x - 1. \Rightarrow e^x = x e^c + 1$$

$$\text{Eftersom } c > 0 \Rightarrow e^c > e^0 = 1 \Rightarrow x e^c > x e^0 = x \Rightarrow x e^c + 1 > x + 1$$

$$\Rightarrow e^x > x + 1.$$

(Liknande bevis då $x < 0$).

$$\text{Om } x = 0, \quad e^0 = 1 \geq 1 + 0.$$