4.5 Kurvkonstruktion

Steg för att rita grafen till en funktion:

I. Bestäm definitionsmängden

II. Bestäm asymptoter (Beräkna gränsvärdena).

III. Beräkna $f'(x)$ och bestämma kritiskapunkterna.

IV. Beräkna $f''(x)$ och bestämma inflektionspunkter.

V. Gör en tabell (förklarat i exemplet).

VI Rita grafen (+ asymptoter)

Ex. Rita grafen till $f(x) = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$.

I. D_f: $x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

$$D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty) = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}.$$

II. Asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{x^4\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2} = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{(samma).}$$

$\Rightarrow$ Inga horisontala asymptoter.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^5}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \Rightarrow x=1 \text{ vertikal asymptot}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^5}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \Rightarrow x=-1 \text{ vertikal asymptot}$$

Sneda asymptoter

$f(x)$ har en sned asymptot $y = kx+m$ om

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (kx+m)\big) = 0 \qquad \text{(Oblique asymptot)}$$

$k \neq 0$

För att bestämma k och m :

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{och} \quad m = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^5}{x \cdot x^4 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = 1$$

$\Rightarrow$ $k = 1$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^5}{(x^2-1)^2} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^5 - x(x^2-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^5 - x(x^4 - 2x^2 + 1)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 - x}{(x^2-1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = 0$$

$\Rightarrow$ $y = x$ är en sned asymptot

III. $$f'(x) = \frac{5x^4 (x^2-1)^2 - x^5 \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{5x^4(x^2-1) - 4x^6}{(x^2-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{5x^6 - 5x^4 - 4x^6}{(x^2-1)^3} = \frac{x^6 - 5x^4}{(x^2-1)^3} = \frac{x^4(x^2-5)}{(x^2-1)^3}.$$

Kritiska punkter:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4(x^2-5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ eller } x = \sqrt{5} \text{ eller } x = -\sqrt{5}$$

IV

$$f''(x) = \frac{(6x^5 - 20x^3)(x^2-1)^3 - 3(x^2-1)^2(2x)(x^6-5x^4)}{(x^2-1)^6}$$

$$= \frac{(6x^5 - 20x^3)(x^2-1) - 6x(x^6 - 5x^4)}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{\cancel{6x^7} - 20x^5 - 6x^5 + 20x^3 - \cancel{6x^7} + 30x^5}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{4x^5 + 20x^3}{(x^2-1)^4} = \frac{4x^3(x^2+5)}{(x^2-1)^4}$$

$$\left.\begin{aligned} &(x^2-1)^4 > 0 \quad \forall\, x \in D_f. \\ &x^2+5 > 0 \quad \forall\, x \in D_f \\ &4x^3 > 0 \quad \text{om } x > 0 \\ & < 0 \quad \text{om } x < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ är en inflektionspunkt}$$

V.

f odefinierad.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-1		0		1		$\sqrt{5}$		∞
(*) $f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$+$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	∞
		$\cap$				$\cap$	inflektion punkt	$\cup$			$\cup$.		

$\left.\begin{aligned} x &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}\right\} \notin D_f$

$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= \sqrt{5} \\ x &= -\sqrt{5} \end{aligned}\right\}$ kritiska punkter.

$x = 0$ inflektionspunkt.

(*) Tecken av f': $x^4 > 0$.

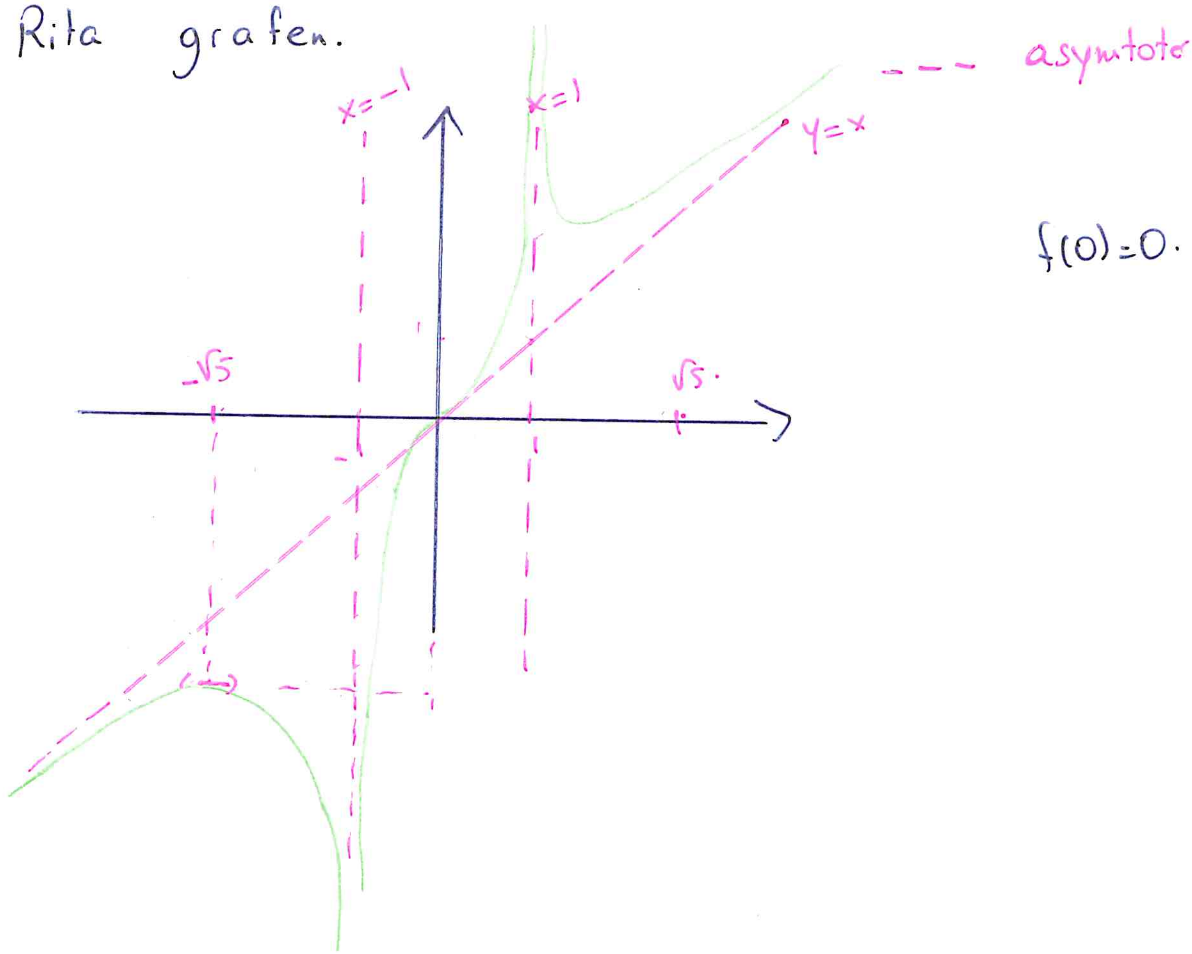
		$-\sqrt{5}$		-1		1		$\sqrt{5}$	
x^2-5	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x^2-1)^3$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
[illegible]	$+$	0	$-$	$\}$	$+$	$\}$	$-$	0	$+$

$$f(-\sqrt{5}) = \frac{(-\sqrt{5})^5}{((-\sqrt{5})^2-1)^2} = \frac{-25\sqrt{5}}{16} \simeq -3{,}5 \qquad f(\sqrt{5}) = \frac{25\sqrt{5}}{16} \simeq 3{,}5$$

<u>Anm.</u> $f(-x) = \dfrac{-x^5}{(x^2-1)^2} = -f(x) \Rightarrow f$ är udda funktion

$\Rightarrow$ symetrisk kring origo.

<u>VI</u> Rita grafen.



$f(0)=0$.