Tenta MVE 535 - Lösning. (19-03-2020)

1. I vilken punkt är tangentlinjen till grafen av $f(x)=e^{x+3}-x$

(a) parallell till linjen $y=2x+3$?

(b) vinkelrät mot linjen $x=4$?

Lösn. Lutning av tangentlinjen är $f'(x)$.

$f'(x)=e^{x+3}-1.$

(a) tangentlinjen är parallell till $y=2x+3 \Rightarrow f'(x)=2$

$\Rightarrow e^{x+3}-1=2 \Rightarrow e^{x+3}=3 \Rightarrow x+3=\ln 3 \Rightarrow x=\ln 3-3.$

$y=e^{\ln 3-3+3}-\ln 3+3 = 3-\ln 3+3 = 6-\ln 3$

$\Rightarrow$ Koordinater av punkten $(\ln 3-3,\ 6-\ln 3)$

(b) vinkel rät mot linjen $x=4 \Rightarrow$ horisontaltangentlinje

$\Rightarrow f'(x)=0$

$\Rightarrow e^{x+3}-1=0 \Rightarrow e^{x+3}=1 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3.$

$y=e^{-3+3}+3=e^{0}+3=4.$

$\Rightarrow$ Punkt $(-3,4)$.

2. Beräkna följande gränsvärdena:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sqrt{x}}{x + \sin x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+x} - \sqrt{2}\,x + 1\right)$

Lösn. (a) $\displaystyle\frac{x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sqrt{x}}{x + \sin x} = \frac{x + \sin x + 2\sqrt{x}}{x + \sin x}$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{x}}{x + \sin x}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{2}{1 + \frac{\sin x}{x}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{\sin x}{x}}.$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \overset{x>0}{\Longrightarrow} -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{(instängningsregel)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0. \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sqrt{x}}{x + \sin x} = 1 + 0 \cdot 2 = 1$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x} - \sqrt{2}\,x + 1\right) = \infty - \infty$

$$\sqrt{2x^2+x} - \sqrt{2}\,x + 1 = \sqrt{2x^2+x} - (\sqrt{2}\,x - 1) = \left(\sqrt{2x^2+x} - (\sqrt{2}\,x - 1)\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{2x^2+x} + (\sqrt{2}x - 1)\right)}{\sqrt{2x^2+x} + (\sqrt{2}x - 1)}$$

$$= \frac{2x^2 + x - (\sqrt{2}\,x - 1)^2}{\sqrt{2x^2+x} + (\sqrt{2}\,x - 1)} = \frac{\cancel{2x^2} + x - \cancel{2x^2} + 2\sqrt{2}\,x - 1}{\sqrt{x^2\left(2 + \frac{1}{x}\right)} + \sqrt{2}x - 1} = \frac{x\left(1 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}x - 1}$$

$$x \to \infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$\frac{\cancel{x}\left(1 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2} - \frac{1}{x}\right)} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

3. Bestäm konstanten a så att

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{4}{4-x^2} + \frac{2a}{x-2} \right)$$

existerar.

Lösning: $\frac{4}{4-x^2} + \frac{2a}{x-2} = \frac{4}{4-x^2} - \frac{2a}{2-x} = \frac{4}{4-x^2} - \frac{2a(2+x)}{(2-x)(2+x)}$

$= \frac{4-4a-2ax}{(2-x)(2+x)}$

Eftersom $\lim_{x \to 2} (2-x)(2+x) = 0$, $\lim_{x \to 2} \frac{4-4a-2ax}{(2-x)(2+x)}$ existerar

om $\lim_{x \to 2} 4-4a-2ax = 0 \Rightarrow 4-4a-4a=0 \Rightarrow 4-8a=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

4. (a) Bestäm centrum och radien av cirkeln

$$2x^2+2y^2-8x+16y = -22$$

Lösning: $2x^2+2y^2-8x+16y=-22 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+8y=-11$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+8y+16=-11+4+16$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+4)^2=9$

$\Rightarrow$ Centrum: $(2,-4)$

Radie $= \sqrt{9} = 3$.

(b) I hur många punkter skär linjen $y=mx-1$ cirkeln i (a)?

Lösn. Skärningspunkterna är lösning till systemet

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y+4)^2=9 \\ y=mx-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + (mx-1+4)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (mx+3)^2 = 9$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + m^2x^2 + 6mx + 9 = 9$

$\Leftrightarrow \quad (1+m^2)x^2 + (6m-4)x + 4 = 0.$

Diskriminant: $D = (6m-4)^2 - 4(1+m^2)\cdot 4$

$= 36m^2 - 48m + 16 - 16 - 16m^2$

$= 20m^2 - 48m = 4m(5m-12).$

Om $D > 0 \Rightarrow$ Det finns två lösningar $\Rightarrow$ 2 skärning punkt.

$D = 0 \Rightarrow$ Endast en lösning $\Rightarrow$ 1 skärning punkt.

$D < 0 \Rightarrow$ ingen lösning $\Rightarrow$ ingen skärningspunkt.

$D = 0 \Rightarrow m = 0$ eller $m = \frac{12}{5}$.

	$-\infty$		0		$\frac{12}{5}$		∞
D		$+$	0	$-$	0	$+$.	

$\Rightarrow \quad m \in (-\infty, 0) \cup (\frac{12}{5}, \infty)$: 2 skärningspunkter.

$m = 0$ eller $m = \frac{12}{5}$: 1 skärningspunkt

$0 < m < \frac{12}{5}$: ingen skärningspunkt.

(N: Kan använda pq-formel istället)

5. Bestäm konstanterna a och b så att funktionen

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$$

har ett lokalt extremvärdet 1 då $x = 3$. Är det ett lokalt maxvärde eller minvärde?

Lösning. f är deriverbar (Rationell funktion) $\Rightarrow$ f har ett lokat extremvärde i $x=3$ om $f'(3) = 0$.

$$f'(x) = \frac{a(x^2-1) - 2x(ax+b)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{ax^2 - a - 2ax^2 - 2bx}{(x^2-1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx - a}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow \frac{-9a - 6b - a}{8} = 0 \Rightarrow -10a - 6b = 0 \Rightarrow \overset{(1)}{\boxed{-5a - 3b = 0}}$$

$$f(3) = 1 \Rightarrow \frac{3a+b}{8} = 1 \Rightarrow \boxed{3a + b = 8}^{(2)}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} -5a - 3b = 0 & (1) \\ 3a + b = 8 & (2) \end{cases} \quad a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{24}{4} = 6, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-40}{4}$$

$$= -10$$

$$\boxed{a=6, \quad b=-10} \Rightarrow f(x) = \frac{6x-10}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2+20x-6}{(x^2-1)^2} \Rightarrow f''(x) = (-12x-20)(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)\cdot 2x(-6x^2$$

$$f''(x) = \frac{(-12x+20)(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)(2x)(\overbrace{-6x^2+20x-6}^{(*)})}{(x^2-1)^4} = \frac{(-12x+20)(x^2-1) - 4x(*)}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(3) = \frac{(-36+20)(8) - 0}{8^3} = \frac{-16}{8^2} < 0 \Rightarrow \text{lokalt max.}$$

5. Bestäm alla reella tal a så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(a-1)^2 x}{\tan x} & x > 0 \\ a(3a-1) & x \leq 0. \end{cases}$$

blir kontinuerlig för alla reella tal x.

<u>Lösning</u> $f(x) = \dfrac{(a-1)^2 x}{\tan x}$ är kontinuerlig för alla $x > 0$ (Kvot av ett polynom och trigonometris funktion).

$f(x) = a(3a-1)$ är kontinuerlig då $x < 0$ (konstant funktion).

$\Rightarrow$ Det räcker att studera kontinuitet då $x = 0$.

f är kontinuerlig i $x=0$ om $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$$f(0) = a(3a-1)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a(3a-1) = a(3a-1)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(a-1)^2 x}{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} (a-1)^2 \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} . \cos x = (a-1)^2$$

$$(a-1)^2 = a(3a-1) \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 3a^2 - a$$

$$\Rightarrow 2a^2 + a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = -1 \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

f är kontinuerlig om $a = -1$ eller om $a = \frac{1}{2}$.

7. Rita grafen till $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

Lösning: 1) D_f : $x^2-4>0 \Rightarrow x \in (-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

2) Asymptoter:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1$$

$(x\to-\infty \Rightarrow x<0 \Rightarrow |x|=-x)$

$\Rightarrow y=-1$ är en horisontal asymptot. i $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1$$

$\left(|x|=x, \quad \begin{matrix} x\to\infty \\ x>0 \end{matrix}\right)$

$\Rightarrow y=1$ är en horisontal asymptot i ∞.

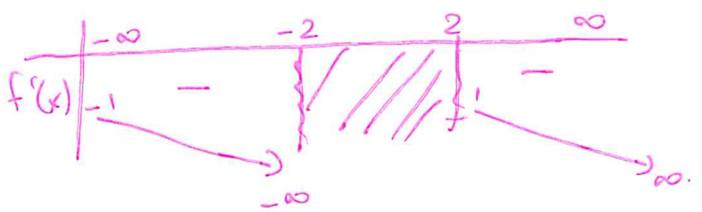
$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \Rightarrow x=-2 \text{ är en vertikal asymptot}$$

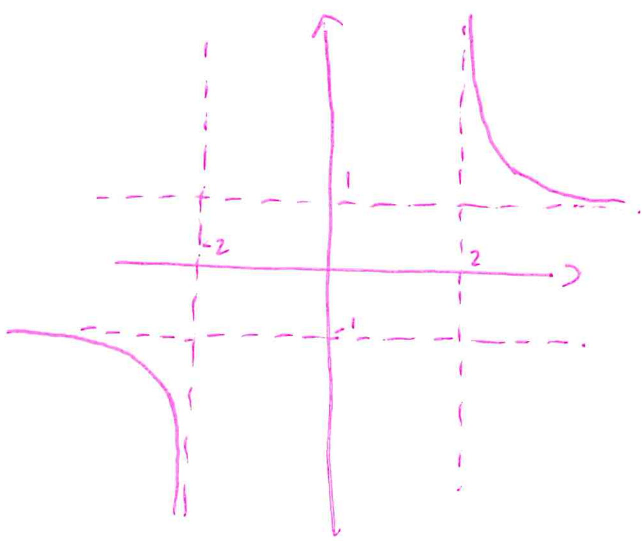
$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{2}{0^+} = \infty \Rightarrow x=2 \text{ är en horisontal asymptot.}$$

3) $$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - \frac{1}{\cancel{2}}(x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\cdot \cancel{2}x^2}{x^2-4} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{x^2-4-x^2}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = \frac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} < 0.$$

$\Rightarrow f(x)$ är avtagande.





8. Visa att $\arctan x + \arccos \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$ är en konstant

för alla reella tal x. Bestäm konstanten.

Lösn. $f(x) = \arctan x + \arccos \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$ deriverbar.

$f(x)$ är en konstant om $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{(1+x^2)^{1/2} - \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} \cdot 2x^2}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{\underbrace{1+x^2-x^2}_{=1}}} \cdot \frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

$$\Rightarrow f(x) = k = f(0) = \arctan 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$\Rightarrow \arctan x + \text{arc}$

9. (a) Ange en funktion vars graf har en vertikal asymptot i $x = 1$, en annan vertikal asymptot i $x = 2$ och en sned asymptot $y = 2x + 3$ i $\pm\infty$.

<u>Lösning</u>: $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (2x+3)\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = 0 \Rightarrow y = 2x+3 \text{ sned asymptot.}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(2x+3 + \frac{1}{(x-1)(x-2)}\right) = 5 + \frac{1}{(-1)\cdot 0}$$

$$\to = 5 + \frac{1}{(-1)0^+} = -\infty \quad x \to 1^+$$

$$\to = -5 + \frac{1}{-1\cdot 0^-} = +\infty \quad x \to 1^-$$

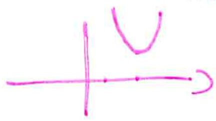
$\Rightarrow$ $x = 1$ är en vertikal asymptot.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 2x+3 + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \begin{cases} 7 + \dfrac{1}{0^+} = \infty & \text{då } x \to 2^+ \\ 7 + \dfrac{1}{0^-} = -\infty & \text{då } x \to 2^- \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x = 2$ är en vertikal asymptot.

(b) Ange en funktion vars derivatan är summan av en trigonometriska funktion (som du väljer) och ett polynom som har ett minvärde 1 då $x = 2$.

<u>Lösning</u>: $f_1(x) = \cos x$ trigonometrisk funktion.

$f_2(x) = (x-2)^2 + 1 \rightarrow$  min 1 då $x = 2$

$$f(x) = \cos x + (x-2)^2 + 1. = \cos x + x^2 - 4x + 5$$

En primitiv till $f(x)$ är $\boxed{F(x) = \sin x + \frac{x^3}{3} - 2x + 5x.}$

10. Spänning U (Volt, V), ström I (Amper, A) och resistan R (Ohm, Ω) i en elektrisk krets är relaterade med ekvationen $U = RI$. Anta att U växer med en hastighet av 1 V/sec och I minskar med en hastighet av $\frac{1}{3}$ A/s.

Hur förändras R då $U = 12V$, $I = 2A$?

Ökar eller minskar R och med vilken hastighet?

Lösning: $U = RI \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{dR}{dt} \cdot I + R\frac{dI}{dt}$ $\quad t =$ tid.

$$\frac{du}{dt} = 1 \qquad \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{3}.$$

$\Rightarrow$ Om $U = 12V$, $I = 2A$ $\Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{12}{2} = 6\,\Omega$.

$$1 = \frac{dR}{dt} \cdot 2 - \frac{6}{3} \cdot = 2\left(\frac{dR}{dt} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

$\Rightarrow$ R ökar med hastighet $\frac{3}{2}\,\Omega/s$.

11. Låt $f(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$

(a) Bestäm definitionsmängden till $f(x)$

Lösn. $2x + \sqrt{4x^2+1} > 0$.

$\sqrt{4x^2+1} > \sqrt{4x^2} = 2|x| > -2x$

$\Rightarrow 2x + \sqrt{4x^2+1} > 0$ för alla x $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

(b) Bestäm ett uttryck för inversen till $f(x)$.

Lösn. $y = \ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right) \Leftrightarrow e^y = 2x + \sqrt{4x^2+1}$

$\Leftrightarrow e^y - 2x = \sqrt{4x^2+1} \Leftrightarrow (e^y - 2x)^2 = 4x^2+1$

$\Leftrightarrow e^{2y} - 4xe^y + \cancel{4x^2} = \cancel{4x^2} + 1$

$\Leftrightarrow 4xe^y = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{2y}-1}{4e^y \neq 0}.$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{4e^x}$

(c) Lös $f(x) = \ln 2$.

Lösn. $f(x) = \ln 2 \Rightarrow x = f^{-1}(\ln 2) = \dfrac{e^{2\ln 2}-1}{4e^{\ln 2}} = \dfrac{e^{\ln 4}-1}{4\cdot 2} = \dfrac{4-1}{8} = \dfrac{3}{8}.$

(d) En funktion g säges vara udda om $g(-x) = -g(x)$.

Visa att $f(x)$ är udda.

$f(-x) = \ln\left(-2x + \sqrt{4(-x)^2+1}\right) = \ln\left(-2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$

$= \ln\left(\left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right)\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right) = \ln\left(\dfrac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)$

$= \ln\left(\dfrac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\right) = -\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right) = -f(x).$