

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga

Datum: 200319 kl. 14.00–18.00
Telefonvakt: Nancy Abdallah
07-28755753

MVE535 Matematisk analys, Del 1

Betygsgränser: 3:20-29p, 4: 30-39p, 5: 40-50p.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen.

Resultat meddelas via Ladok ca. 15 arbetsdagar efter tentamenstillfället.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

1. I vilken punkt är tangentlinjen till grafen av $f(x) = e^{x+3} - x$ (3p)

(a) parallell till linjen $y = 2x + 3$?

(b) vinkelrät mot linjen $x = 4$?

(Skriv ner punkternas koordinater i (a) och (b) och ge exakta och förenklade svar).

2. Beräkna följande gränsvärdena:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) + 2\sqrt{x}}{x + \sin x}.$ (3p)

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2x + 1}).$ (3p)

3. Bestäm konstanten a så att (2p)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{4 - x^2} + \frac{2a}{x - 2} \right)$$

existerar.

4. (a) Bestäm centrum och radien till cirkeln (2p)

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 16y = -22.$$

(b) I hur många punkter skär linjen $y = mx - 1$ cirkeln i (a)? (4p)

5. Bestäm konstanterna a och b så att funktionen (4p)

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$$

har ett lokalt extremvärdet 1 då $x = 3$. Är det ett lokalt maxvärde eller minvärde?

6. Bestäm alla reella tal a så att funktionen (4p)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(a-1)^2 x}{\tan x} & x > 0 \\ a(3a - 1) & x \leq 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$.

7. Rita grafen till (4p)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

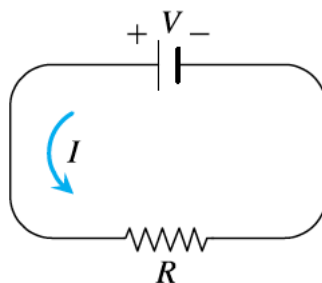
Konvexitet/Konkavitet behöver inte utredas.

8. Visa att (4p)

$$\arctan x + \arccos \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

är en konstant för alla reella tal x . Bestäm konstanten.

9. (a) Ange en funktion vars graf har en vertikal asymptot i $x = 1$, en annan vertikal asymptot i $x = 2$ och en sned asymptot $y = 2x + 3$ i oändligheten ($\pm\infty$). (3p)
- (b) Ange en funktion vars derivata är summan av en trigonometrisk funktion (som du väljer) och ett polynom som har ett minvärde 1 då $x = 2$. (3p)
10. Spänning U (Volt, V), ström I (Amper, A) och resistans R (Ohm, Ω) i en elektrisk krets (se figuren nedan) är relaterade med ekvationen $U = RI$. Anta att U växer med en hastighet av 1 V/sec och I minskar med en hastighet av 1/3 A/sec. (3p)



Hur förändras R då $U = 12\text{V}$ och $I = 2\text{A}$? Ökar eller minskar R och med vilken hastighet?

11. Låt $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.
- (a) Bestäm definitionsmängden till $f(x)$ (2p)
- (b) Bestäm ett uttryck för inversen till $f(x)$. (3p)
- (c) Lös $f(x) = \ln 2$. (Förenkla ditt svar så mycket som möjligt). (1p)
- (d) En funktion g säges vara udda om $g(-x) = -g(x)$. Visa att $f(x)$ är udda. (2p)