

Sammanfattning föreläsning 2, Linjär algebra IT, VT2021

Skalarprodukten uppfyller följande räkneregler:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, $c \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

Den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på linjen L med riktningsvektor $\mathbf{u}$ ges av

$$\mathbf{v}_L = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} \text{ så speciellt är } \|\mathbf{v}_L\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på ett plan π , $\mathbf{v}_\pi$, definieras som den vektor som ligger i planet π och sådan att $\mathbf{v} - \mathbf{v}_\pi$ är en normal till π .

En vektortrippel $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ i rummet säges vara högerorienterad om vyn från $\mathbf{w}$'s spets ger att minsta vridningen från $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}$ är moturs (positiv). Om det är tvärtom så säges den vara vänsterorienterad. ((Tumme, pekfinger, långfinger) på *höger* hand är högerorienterade.)

Vektorprodukten, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, mellan två vektorer i rummet $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är den unika vektor som uppfyller:

1. om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \alpha$ med α minsta vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, d v s lika med arean av parallelogrammet som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp.
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.
4. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ utgör ett högersystem.

Räkneregler för vektorprodukt:

1. $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
2. $(c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$, $c \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

Låt $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ vara tre parvis ortogonala enhetsvektorer och $\mathbf{v}$ en vektor i rummet med $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ för några reella tal x , y och z . Vi kallar x , y och z för $\mathbf{v}$'s koordinater med avseende på basen $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ och skriver

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Formler för vektoroperationerna i termer av koordinater:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$